بسيطة

الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

ورقة تمارين: التكامل المحدّد وخواصّه

التكامل والتوابع الأصليّة . 12 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

---

1. ليكن F تابعاً أصليّاً للتابع المستمرّ f على مجالٍ يحوي a و b . ما هو $\int_a^b f(x)\,dx$ بالتعريف؟

أ) $F(a) - F(b)$

ب) عددٌ يتغيّر بتغيّر التابع الأصليّ F المختار

ج) $F(b) - F(a)$

2. ما العلاقة بين $\int_0^1 x^2\,dx$ و $\int_0^1 t^2\,dt$ ؟

أ) مختلفان، لأنّ المتحوّلين مختلفان

ب) الثاني يساوي الأوّل مضروباً بـ t

ج) متساويان تماماً

3. ما قيمة $\int_0^2 \dfrac{2}{x-3}\,dx$ ؟

أ) $-2\ln 3$

ب) $2\ln 3$

ج) غير معرّف، لأنّ $\ln(x-3)$ غير معرّفٍ على $[0,\,2]$

4. علمنا أنّ $\int_1^5 f = 12$. ما قيمة $\int_5^1 f$ ؟

أ) 12

ب) -12

ج) $\dfrac{1}{12}$

5. بعلاقة شال، ما هو $\int_0^5 f$ بدلالة تكاملات أخرى؟

أ) $\int_0^2 f \times \int_2^5 f$

ب) $\int_0^2 f + \int_2^5 f$

ج) $\int_0^2 f - \int_2^5 f$

6. ما قيمة $\int_0^2 \left|x^2 - 1\right|\,dx$ ؟

أ) $\dfrac{4}{3}$

ب) 2

ج) $\dfrac{2}{3}$

7. لحساب $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$ بالتجزئة، أيّ العاملين نجعله u ، أي الذي يُشتقّ؟

أ) العامل x

ب) العامل $\sin x$

ج) أيّهما، فالنتيجة واحدة

8. ما صيغة التكامل بالتجزئة؟

أ) $\int_a^b u\,v' = [u\,v]_a^b + \int_a^b u'\,v$

ب) $\int_a^b u\,v' = [u\,v]_a^b - \int_a^b u'\,v$

ج) $\int_a^b u\,v' = [u'\,v]_a^b - \int_a^b u\,v'$

9. نكتب $1 = \lambda(x+1) + \mu(x-2)$ لتفكيك $\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$. بالتعويض $x = -1$ ، أيّ ثابتٍ نحصل عليه؟

أ) نحصل على $\mu = -\dfrac{1}{3}$

ب) نحصل على $\lambda = -\dfrac{1}{3}$

ج) لا نحصل على شيء، لأنّ المقام ينعدم عند -1

10. أردنا حساب $\int_3^4 \dfrac{x^2+1}{x^2-x-2}\,dx$. ما الخطوة الأولى؟

أ) تعيين λ و μ من $x^2+1 = \lambda(x+1) + \mu(x-2)$

ب) كتابة الجواب مباشرةً $\ln\left(x^2-x-2\right)$

ج) قسمة إقليديّة للبسط على المقام

11. كيف نجد تابعاً أصليّاً للتابع $f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{(x+2)^2}$ على $]-\infty,\,-2[$ ؟

أ) بوضع $2x-1 = \lambda(x+2) + \mu(x+2)$ وتعيين الثابتين

ب) لا يمكن، فالحالة خارج ما درسناه

ج) بكتابة $2x-1 = 2(x+2) - 5$ ، فيصير $f(x) = \dfrac{2}{x+2} - \dfrac{5}{(x+2)^2}$

12. ما قيمة $\int_7^7 f$ لتابعٍ f مستمرٍّ كيفما كان؟

أ) 0

ب) $f(7)$

ج) غير معرّف، لأنّ الحدّين متساويان

سلّم التصحيح

1. ج نعم، وهو ما يُختصر بالرمز $\left[F(x)\right]_a^b$. لا مساحة ولا مجموع في التعريف، فرقُ قيمتين فقط.

2. ج نعم، وهذا معنى أنّ المتحوّل مقيَّد. ولهذا يسمح الكتاب بالكتابة المختصرة $\int_0^1 f$ عند عدم الحاجة إلى الصيغة.

3. أ نعم. على $[0,\,2]$ يكون $x-3<0$ ، فالفرع هو $2\ln(3-x)$ ، والتعويض يعطي $2\ln 3-2\ln 1$.

4. ب نعم. وهذه الخاصّة هي الوحيدة في الدرس التي لا يبرهنها الكتاب ولا يطبّقها في مثال، مع أنّها تُستعمل كثيراً.

5. ب نعم. والعدد 2 ليس ملزماً بأن يقع بين الحدّين: المبرهنة تطلب فقط أن يكون من المجال.

6. ب نعم. الصفر الداخليّ هو 1 ، فنقطع عنده بعلاقة شال، ثمّ نحسب كلّ قطعةٍ وحدها: $\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$.

7. أ نعم. اشتقاق x يعطي 1 فيختفي كثير الحدود من التكامل الجديد، ومكاملة $\sin x$ تعطي $-\cos x$ وهي بالصعوبة نفسها.

8. ب نعم. ولاحظ حركة الشرطة: كانت على v فصارت على u . البرهان كلّه هو قاعدة اشتقاق الجداء مقروءةً بالمقلوب، مع المبرهنة 5 .

9. أ نعم، والتبادل هو المفاجأة: التعويض بصفر القوس الأوّل يُلغي λ ويترك μ . فيبقى $\mu(-1-2)=1$.

10. ج نعم، الدرجتان متساويتان فالقسمة أوّلاً: $x^2+1=(x^2-x-2)+x+3$. ثمّ يعود الباقي $\frac{x+3}{x^2-x-2}$ إلى الحالة الأولى.

11. ج نعم، والحدّان سطران جاهزان من الدرس السابق: $\frac{u'}{u}$ و $u'u^n$ مع $n=-2$. فالجواب $\frac{5}{x+2}+2\ln(-x-2)$ ، والفرع المأخوذ هو $\ln(-u)$ لأنّ $x+2<0$ هناك.

12. أ نعم، ولا حاجة إلى معرفة f . بالتعريف هو $F(7)-F(7)$. والكتاب لا يكتب هذه النتيجة في أيّ سطرٍ من هذا الدرس، مع أنّها تخرج من الخاصّة ③ بوضع $b=a$.