

☆ بسيطة

الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

ورقة تمارين: التوابع الأصلية

التكامل والتوابع الأصلية . 12 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

1. لكي نثبت أن F تابعٌ أصليٌّ للتابع f على المجال I ، ممّ نتحقق؟

(أ) من أن f مستمرٌّ على I

(ب) من أن $F(x) = f'(x)$ عند كلّ x من I

(ج) من أن F اشتقاقٍ على I ، وأن $F'(x) = f(x)$ عند كلّ x من I

2. وجدنا تابعاً أصلياً F للتابع f على مجال I . كم تابعاً أصلياً للتابع f على I يوجد؟

(أ) عددٌ غير منتهٍ منها، وتختلف عن F بثابتٍ حقيقيٍّ لا أكثر

(ب) واحدٌ فقط، وهو الذي وجدناه

(ج) عددٌ غير منتهٍ منها، ويمكن أن يكون الفرق بين اثنين منها أيّ تابعٍ يُشاء

3. تابعٌ أصليٌّ للتابع $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $] -\infty, 0[$ هو:

(أ) $\ln x$

(ب) $\ln(-x)$

(ج) $-\ln x$

4. ليكن F تابعاً أصلياً للتابع f على المجال I ، ولتكن x_0 من I و y_0 من $\mathbb{R}$. كم تابعاً أصلياً G للتابع f على I يحقق $G(x_0) = y_0$ ؟

(أ) واحدٌ وحيد

(ب) عائلةٌ كاملة، لأنّ الثابت يبقى حراً

(ج) لا يوجد إلا إذا صادف أنّ $y_0 = F(x_0)$

5. التابع الأصليُّ للتابع $f : x \mapsto 3x^2 - x + 1$ على $\mathbb{R}$ الذي ينعدم عند $x = 1$ هو:

(أ) $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$

(ب) $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$

(ج) $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$

6. لماذا يشترط التعريف والمبرهنتان أن تكون I مجالاً، لا مجموعةً كيفما كانت؟

(أ) لأنّ الاشتقاق لا يُعرّف إلا على مجال

(ب) لأنّ برهان المبرهنة 1 ② يستعمل أنّ تابعاً معدوم المشتقّ يكون ثابتاً، وهذا لا يصحّ إلا على مجال

(ج) لأنّ التوابع المستمرة لا تُعرّف إلا على مجالات

7. علمنا أنّ للتابع f تابعاً أصلياً على المجال I . ماذا نستنتج عن استمرار f ؟

- (أ) هو مستمرّ حتماً على I
 (ب) لا شيء: قد يكون مستمرّاً وقد لا يكون
 (ج) هو غير مستمرّ حتماً على I

8. التابع f مستمرّ على المجال I . ما الذي تعطيه المبرهنة 2 بالضبط؟

- (أ) صيغة صريحة للتابع الأصليّ
 (ب) طريقة لحساب التابع الأصليّ خطوة خطوة
 (ج) ضمان الوجود وحده، بلا صيغة وبلا طريقة

9. أيكون $F : x \mapsto x \cos x$ تابعاً أصلياً للتابع $f : x \mapsto \cos x - x \sin x$ على $\mathbb{R}$ ؟

- (أ) نعم، لأنّ $F'(x) = \cos x - x \sin x$
 (ب) لا، لأنّ $F'(x) = \cos x + x \sin x$
 (ج) لا، لأنّ $F'(x) = -x \sin x$

10. على أيّ مجال يكون $F : x \mapsto \ln(\ln x)$ تابعاً أصلياً للتابع $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ ؟

- (أ) على $]0, +\infty[$
 (ب) على $]1, +\infty[$
 (ج) على $]0, 1[\cup]1, +\infty[$

11. على المجال $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ نأخذ $F(x) = \tan^2 x$ و $G(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. أهما تابعا أصليان للتابع نفسه؟

- (أ) نعم، لأنّ $G - F = 1$ ، وهو ثابت
 (ب) لا، لأنّ صيغتهما مختلفتان
 (ج) لا، لأنّ G غير معرّف عند 0

12. على $\mathbb{R}$ نأخذ $F(x) = \sin 3x - 2 \sin x$ و $G(x) = \sin x - 3 \sin^3 x$. أهما تابعا أصليان للتابع نفسه؟

- (أ) نعم، لأنّ مشتقيهما متساويان عند $x = 0$
 (ب) نعم، لأنّ كليهما مبنيّ على الجيب وحده
 (ج) لا، لأنّ $F - G = -\sin^3 x$ ، وهو ليس ثابتاً

سَلَم التصحيح

1. ج نعم، شرطان لا ثالث لهما، وكلاهما على F . وهذا حرفياً ما يجب عنه الكتاب في الصفحة 201 .
2. أ نعم. المبرهنة 1 تقول الاتجاهين معاً: كل $F + k$ تابع أصلي، وكل تابع أصلي من هذه الصيغة.
3. ب نعم. عند $x < 0$ يكون $-x$ موجباً، والاشتقاق يعطي $\frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$ ، فالإشارتان تختصران.
4. أ نعم، وهذا نص المبرهنة 1 ③. السبب في سطر: كل تابع أصلي هو $F + k$ ، والشرط معادلة من الدرجة الأولى في k ، فلها حل واحد.
5. ج نعم. الاشتقاق يعيد $3x^2 - x + 1$ ، والتعويض بـ 1 يعطي $1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{2} = 0$. الشرطان محققان.
6. ب نعم، وهذه هي الخطوة التي لا يسميها الكتاب. على $\mathbb{R}^*$ يمكن أن يكون الفرق 0 على اليسار و 1 على اليمين: مشتقه معدوم وهو ليس ثابتاً.
7. ب نعم. المبرهنة 2 تشير في اتجاه واحد: من الاستمرار إلى الوجود. الطريق الآخر مفتوح في الحالتين.
8. ج نعم، وهذا هو معنى «مبرهنة وجود». تفيدك حين تسأل هل البحث مجدٍ، ولا تفيدك في البحث نفسه.
9. أ نعم. بقاعدة الجداء $F'(x) = 1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x)$. التحقق كله سطر واحد، وهذا كل ما يطلبه هذا الدرس.
10. ب نعم. الشرط $\ln x > 0$ يكافئ $x > 1$. وهناك $F'(x) = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$ ، وهو المطلوب.
11. أ نعم. $\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1$. وثبات الفرق على مجال يكافئ تساوي المشتقين، بالمبرهنة 1 .
12. ج نعم. بالدستور $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ يصير $F = \sin x - 4 \sin^3 x$ ، فالفرق $-\sin^3 x$. وهو 0 عند $x = 0$ و -1 عند $x = \frac{\pi}{2}$.