بسيطة

الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

ورقة تمارين: التكامل المحدّد وحساب المساحة

التكامل والتوابع الأصليّة . 12 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

---

1. التابع f مستمرٌّ وموجب على $[a,\,b]$. متى نضمن أنّ $\int_a^b f \geq 0$ ؟

أ) دائماً، ما دام $f \geq 0$

ب) متى كان f اشتقاقيّاً أيضاً

ج) متى كان $a < b$

2. علمنا أنّ $f \leq g$ على $[0,\,4]$. ما الاستنتاج الصحيح؟

أ) $\int_0^4 f \leq \int_0^4 g$

ب) $\int_4^0 f \leq \int_4^0 g$

ج) $\left|\int_0^4 f\right| \leq \left|\int_0^4 g\right|$

3. أثبتنا أنّ $\sin t \leq t$ عند $t \geq 0$. ماذا نحصل عليه بمكاملة الطرفين على $[0,\,b]$ ؟

أ) $\cos b \leq \dfrac{b^2}{2}$

ب) $\sin b \leq \dfrac{b^2}{2}$

ج) $1 - \cos b \leq \dfrac{b^2}{2}$

4. التابع f مستمرٌّ وموجب على $[a,\,b]$ مع $b > a$. ما الذي يساويه $\int_a^b f$ ؟

أ) مساحة السطح بين $\mathcal{C}_f$ ومحور الفواصل والمستقيمين $x = a$ و $x = b$

ب) طول قوس $\mathcal{C}_f$ المحصور بين $x = a$ و $x = b$

ج) متوسّط قيم f على المجال

5. ما مساحة السطح المحدود المحصور بين الخطّ البياني للتابع $f : x \mapsto 4x(1-x)$ ومحور الفواصل؟

أ) 1

ب) $\dfrac{2}{3}$

ج) $\dfrac{4}{3}$

6. التابع f سالبٌ على $[a,\,b]$ مع $b > a$. ما المساحة؟

أ) $\int_a^b f$

ب) $\int_a^b (-f)$

ج) $\int_b^a (-f)$

7. التابع f يغيّر إشارته داخل $[a,\,b]$. ما الصيغة العامّة للمساحة؟

أ) $\left|\int_a^b f\right|$

ب) $\int_a^b |f|$

ج) $\int_a^b f$

8. ما الفرق بين $\int_a^b f$ و $\int_a^b |f|$ بلغة الكتاب؟

أ) الأوّل قياسٌ جبريّ، أي مساحةٌ بإشارة، والثاني المساحة الفعليّة

ب) لا فرق، فالمساحة موجبة دائماً

ج) الأوّل مساحة والثاني حجم

9. نريد مساحة السطح بين $\mathcal{C}$ والمحور على $[-2,\,1]$ للتابع $f : x \mapsto 2x^3 + 3x^2 - 2x$. ما الخطوة الأولى؟

أ) تحليل f وإيجاد أصفاره داخل المجال

ب) حساب $\int_{-2}^{1} f$ مباشرةً

ج) إيجاد تابعٍ أصليّ F والتعويض بالحدّين

10. بمتابعة السؤال السابق، وبمعرفة $F(-2) = -4$ و $F(0) = 0$ و $F\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{32}$ و $F(1) = \frac{1}{2}$ ، ما المساحة؟

أ) $\dfrac{9}{2}$

ب) $\dfrac{147}{32}$

ج) $\dfrac{75}{16}$

11. في أسئلة البكالوريا التي قرأناها، أين يقع طلب المساحة داخل المسألة؟

أ) في أوّلها، قبل دراسة التابع

ب) في آخرها، بعد الدراسة والرسم

ج) بدل الرسم، فمن يحسب المساحة لا يحتاج إلى رسم

12. ما صيغة المساحة المحصورة بين خطّين بيانيّين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ على $[a,\,b]$ ؟

أ) $\int_a^b f - \int_a^b g$

ب) $\int_a^b |f| - \int_a^b |g|$

ج) $\int_a^b |f - g|$

سلّم التصحيح

1. ج نعم، وهذا الشرط هو الخطأ الوحيد الذي يذكره الكتاب صراحةً في صفحة أخطاء الوحدة. رتّب الحدّين قبل أن تقرأ الإشارة.

2. أ نعم. الحدّان مرتّبان $0 < 4$ ، فالمبرهنة 8 ② تنطبق مباشرةً. وبرهانها سطر: طبّق ① على الفرق $g - f$.

3. ج نعم، وهي المتراجحة الثانية من الثلاث. أعِد ترتيبها فتصير $1 - \dfrac{b^2}{2} \le \cos b$. وهذه بدورها تصير مُكامَل الخطوة التالية.

4. أ نعم، وهذه هي المبرهنة 9 . لاحظ أنّ الحدود أربعة: خطّان مستقيمان، محورٌ، وخطٌّ بيانيّ. السطح مغلقٌ بينها.

5. ب نعم. الصفران هما 0 و 1 ، والتابع موجبٌ بينهما، فالمساحة $\int_0^1 (4x - 4x^2)\,dx = 2 - \dfrac{4}{3}$.

6. ب نعم، وهذه هي النتيجة 10 . والسبب هندسيّ: $\mathcal{C}_{-f}$ هو صورة $\mathcal{C}_f$ بالتناظر بالنسبة إلى محور الفواصل، والتناظر لا يغيّر المساحة.

7. ب نعم، وهذه هي النتيجة 11 . والقيمة المطلقة داخل التكامل تعني عملياً: اقطع عند الأصفار واقلب التابع في القطع السالبة.

8. أ نعم، وهذان مصطلحا الكتاب نفسه على الصفحة 220 . إن سُئلت عن التكامل فالأوّل، وإن سُئلت عن المساحة فالثاني.

9. أ نعم. $f(x) = x(x+2)(2x-1)$ ، والأصفار -2 و 0 و $\dfrac{1}{2}$ ؛ اثنان منها داخل المجال، وعندهما نقطع.

10. ج نعم. القطع هي 4 ثمّ $\dfrac{3}{32}$ ثمّ $\dfrac{19}{32}$ ، ومجموعها $\dfrac{75}{16}$. لاحظ أنّ الجواب أكبر من القياس الجبريّ $\dfrac{9}{2}$ ، وهذا متوقّعٌ كلّما نزل التابع تحت المحور في مكانٍ ما. ولو كان موجباً على المجال كلّه لتساوى العددان.

11. ب نعم، وفي كلّ ما قرأناه. الرسم يسبق المساحة لأنّه هو الذي يريك أين ينقلب الوضع. من يقفز إلى التكامل قبل الرسم يخسر معلومةً كانت بين يديه.

12. ج نعم، والطريقة هي نفسها: ادرس إشارة الفرق، اقطع عند التقاطع، واجمع. والكتاب يضع هذه الصيغة في نشاطٍ خارج الدرس ويبدأها بـ «نقبّل»، أي بلا برهان.

التكامل المحدّد وحساب المساحة . المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 217 إلى 220 . basita123.com