الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

بسيطة

ورقة تمارين: المقارب المائل

التوابع: النهايات والاستمرار . 16 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

---

1. متى نقول إنّ المستقيم $\Delta : y = ax + b$ مقاربٌ مائل للخطّ البياني C_f في جوار $+\infty$ ؟

أ) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

ب) $\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - (ax + b)\right) = 0$

ج) $\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) + (ax + b)\right) = 0$

2. المستقيم Δ معادلته $y = x + 1$. ما الفرق $f(x) - (x + 1)$ لهذا التابع؟

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 2}$$

أ) $\frac{1}{x+2}$

ب) $\frac{-1}{x+2}$

ج) $\frac{-1}{x^2+3x+1}$

3. بعد أن وجدنا $f(x) - (x + 1) = \frac{-1}{x+2}$ ، أين يقع C_f بالنسبة إلى $\Delta : y = x + 1$ على المجال $]-2, +\infty[$ ؟

أ) فوق Δ

ب) يقطع Δ عند $x = -1$

ج) تحت Δ

4. وعلى المجال $]-\infty, -2[$ ، أين يقع C_f بالنسبة إلى Δ في المثال نفسه؟

أ) فوق Δ

ب) تحت Δ

ج) لا يمكن الحكم، لأنّ المقارب يوصف عند $+\infty$ وحده

5. هل المستقيم $\Delta : y = 2x + 3$ مقاربٌ مائل للخطّ البياني لهذا التابع في جوار $+\infty$ ؟

$$f(x) = 2x + 3 + \frac{10}{x + 1}$$

أ) لا، لأنّ نهاية التابع عند $+\infty$ هي $+\infty$

ب) لا، لأنّ الفرق $\frac{10}{x+1}$ لا ينعدم أبداً

ج) نعم، لأنّ $\lim_{x \to +\infty} \frac{10}{x+1} = 0$

6. في التابع نفسه $f(x) = 2x + 3 + \frac{10}{x+1}$ ، أين يقع C_f بالنسبة إلى $\Delta : y = 2x + 3$ على المجال $]-1, +\infty[$ ؟

أ) فوق Δ

ب) تحت Δ

ج) فوقه أحياناً وتحته أحياناً

7. أيّ العبارات صحيحة عن التابع $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$ والمستقيم $\Delta : y = x$ في جوار $+\infty$ ؟

أ) Δ مقاربٌ مائل، ومع ذلك يقطعه C_f عند كلّ مضاعفٍ غير معدوم لـ π

ب) ليس مقارباً، لأنّ $\sin x$ ليست له نهاية عند $+\infty$

ج) Δ مقاربٌ مائل، ولذلك لا يقطعه C_f أبداً

8. المستقيم Δ معادلته $y = 2x + 1$. ما الفرق $f(x) - (2x + 1)$ لهذا التابع؟

$$f(x) = \frac{2x^2 - 7x - 3}{x - 4}$$

أ) $\frac{-1}{x-4}$

ب) $\frac{1}{x-4}$

ج) $\frac{-7x-3}{x-4}$

9. أثبتنا أنّ $\Delta : y = x - 2$ مقاربٌ مائل، ووجدنا $f(x) - (x - 2) = \frac{-3}{(x+1)^2}$. ما الوضع النسبي؟

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x - 5}{(x + 1)^2}$$

أ) C_f تحت Δ على مجموعة التعريف كلّها

ب) فوق Δ بعد -1 وتحته قبلها

ج) يقطع Δ عند $x = -1$

10. أيّ العبارات صحيحة عن التابع $f(x) = -x + 1 - \frac{1}{x^2}$ والمستقيم $\Delta : y = -x + 1$ ؟

أ) Δ مقاربٌ مائل عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ، و C_f تحته دائماً

ب) Δ مقاربٌ مائل عند $+\infty$ وحده

ج) Δ مقاربٌ أفقي معادلته $y = 1$

11. أيّ من هذه التوابع الكسريّة يقبل خطّه البياني مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$ ؟

أ) $\frac{3x+1}{x+2}$

ب) $\frac{2x^2+1}{x+3}$

ج) $\frac{x^3+1}{x+1}$

12. خطٌّ بياني له في جوار $+\infty$ مقاربٌ مائل ميله 3 ويقطع محور التراتيب عند -2 . ما معادلته؟

أ) $x = 3y - 2$

ب) $y = -2x + 3$

ج) $y = 3x - 2$

13. أُعطي المستقيم $\Delta : y = ax + b$ وطُلب إثبات أنّه مقاربٌ مائل. ما الذي يُنهي البرهان؟

أ) أن نُجري القسمة ونكتب $f(x) = ax + b + g(x)$ ونكتفي بذلك

ب) أن نقارن درجة البسط بدرجة المقام ونكتفي بذلك

ج) أن نُشكّل الفرق $f(x) - (ax + b)$ ونُثبت أنّ نهايته 0

14. في التعريف $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ ، ماذا يكون المستقيم إذا كان $a = 0$ ؟

أ) مقارباً شاقوليّاً معادلته $x = b$

ب) مقارباً أفقيّاً معادلته $y = b$

ج) لا يوجد مقارب، لأنّ المستقيم يصير ثابتاً

15. التابع $f(x) = \frac{x^2 + \frac{5}{2}x + \sqrt{x} + 1}{2x + 1}$ معرّف على $]0, +\infty[$ ، والمستقيم $\Delta : y = \frac{1}{2}x + 1$. أيّ العبارات صحيحة؟

أ) Δ مقاربٌ مائل عند $+\infty$ ، و C_f فوقه

ب) Δ مقاربٌ مائل عند $+\infty$ وعند $-\infty$ معاً

ج) Δ ليس مقارباً، لأنّ الفرق يحوي جذراً

16. ما مقاربات الخطّ البياني للتابع $f(x) = x + \sqrt{x^2}$ عند طرفي مجموعة التعريف؟

أ) $y = 2x$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$ معاً

ب) لا يوجد مقاربٌ مائل، لأنّ الجذر يمنع ذلك

ج) $y = 2x$ عند $+\infty$ و $y = 0$ عند $-\infty$

سلّم التصحيح

1. ب صحيح. هذا هو تعريف 5 حرفيّاً: الفرق بين التابع ومعادلة المستقيم يؤول إلى الصفر، وهو شرطٌ لازم وكافٍ.

2. ب صحيح. بضرب $(x+1)$ بـ $(x+2)$ نحصل على x^2+3x+2 ، فتتلاشى حدود x^2 و x ويبقى -1 في البسط.

3. ج صحيح، وهذا نصّ الكتاب: على المجال $]-2,+\infty[$ يكون $f(x)-(x+1)<0$ ، فجزء الخطّ البياني الموافق لقيم $x>-2$ يقع تحت Δ .

4. أ صحيح. هنا $x+2$ سالب والبسط -1 سالب، فالكسر موجب، والفرق الموجب يعني أنّ C_f فوق Δ .

5. ج صحيح. الفرق $f(x)-(2x+3)$ هو $\frac{10}{x+1}$ ، ونهايته 0 ، فالشرط اللازم والكافي متحقّق.

6. أ صحيح. البسط 10 موجب و $x+1>0$ على هذا المجال، فالفرق موجب و C_f فوق Δ .

7. أ صحيح. الفرق $\frac{\sin x}{x}$ نهايته 0 ، فـ Δ مقاربٌ مائل، وهو ينعدم عند كلّ $x=k\pi$ حيث k عدد صحيح غير معدوم، فالالتقاء يتكرّر بلا انتهاء.

8. ب صحيح. $(2x+1)(x-4)=2x^2-7x-4$ ، فيبقى في البسط $-3+4=1$ ، والمقام $x-4$ كما هو.

9. أ صحيح. المقام $(x+1)^2$ موجب تماماً لكلّ $x\neq -1$ ، والبسط -3 سالب، فالفرق سالب دائماً ولا يتغيّر وضعه.

10. أ صحيح. الفرق $\frac{-1}{x^2}$ نهايته 0 عند الطرفين، وهو سالب تماماً لكلّ $x\neq 0$ ، فالوضع واحد على المجالين.

11. ب صحيح. درجة البسط تزيد على درجة المقام بواحدٍ تماماً، وبالكتابة $2x-6+\frac{19}{x+3}$ يظهر المستقيم $y=2x-6$ ، والبرهان حساب نهاية الفرق.

12. ج صحيح. الميل 3 هو معامل x ، والمقطع المبدئي -2 هو الحدّ الثابت، فالمعادلة $y=3x-2$.

13. ج صحيح. هذه هي الخطوات التي يطلبها سلّم التصحيح: تشكيل الفرق، ثمّ حساب نهايته، ثمّ الاستنتاج، ثمّ دراسة الوضع النسبي.

14. ب صحيح. مع $a=0$ يصير الشرط $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-b)=0$ ، أي $\lim f(x)=b$ ، وهو تعريف المقارب الأفقي من الدرس الأوّل.

15. أ صحيح. حاصل $(2x+1)\left(\frac{1}{2}x+1\right)$ هو $x^2+\frac{5}{2}x+1$ ، فالفرق $\frac{\sqrt{x}}{2x+1}$ ، ونهايته 0 وإشارته موجبة.

16. ج صحيح. لأنّ $\sqrt{x^2}=|x|$ ، يكون $f(x)=2x$ عندما $0\leq x$ و $f(x)=0$ عندما $x<0$. مقاربان مختلفان عند الطرفين، وهذا ما يوجب حساب كلّ طرف على حدة.

المقارب المائل . المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 40 إلى 41 . basita123.com