الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

ورقة تمارين: الاستمرار

التوابع: النهايات والاستمرار . 16 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

بسيطة

1. متى نقول إنّ التابع f مستمرّ عند النقطة a من مجموعة تعريفه؟

أ) حين يكون $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

ب) حين يكون $\lim_{x\to a} f(x) = 0$

ج) حين يكون f معرّفاً عند a

2. التابع f معرّف بـ $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ من أجل $x \neq 1$ ، وبـ $f(1) = 3$. هل f مستمرّ عند 1 ؟

أ) لا، لأنّ النهاية عند 1 هي 2 وهي تخالف $f(1)$

ب) نعم، لأنّ التابع معرّف عند 1 وله نهاية عندها

ج) لا، لأنّ التابع غير معرّف عند 1

3. هل التابع $x \mapsto \sqrt{x}$ اشتقاقي عند الصفر؟

أ) نعم، لأنّه مستمرّ عند الصفر

ب) لا، لأنّ $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty$

ج) لا، لأنّه غير مستمرّ عند الصفر

4. ما القول الصحيح عن استمرار التابع $x \mapsto \frac{1}{x-2}$ ؟

أ) غير مستمرّ عند 2

ب) مستمرّ على $\mathbb{R}$

ج) مستمرّ على مجموعة تعريفه، أي على $]-\infty, 2[$ وعلى $]2, +\infty[$

5. التابع g يحقّق $\lim_{x\to 3,\ x<3} g(x) = 1$ و $\lim_{x\to 3,\ x>3} g(x) = 2$ و $g(3) = 1$. هل g مستمرّ عند 3 ؟

أ) نعم، لأنّ النهاية من اليسار تساوي $g(3)$

ب) لا يمكن الحكم قبل معرفة $g'(3)$

ج) لا، لأنّه لا نهاية له عند 3

6. على أيّ مجموعة يكون التابع $P : x \mapsto x^3 - 2x + 7$ مستمرّاً؟

أ) على $[0, +\infty[$

ب) على $\mathbb{R}$

ج) على $\mathbb{R}$ ما عدا جذوره

7. على أيّ مجموعة يكون التابع $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ مستمرّاً؟

أ) على $[-5, -1]$

ب) على $]0, +\infty[$ وحده

ج) على $\mathbb{R}$ ، لأنّ $(x+2)^2 + 1 > 0$ دائماً

8. ماذا تقول مبرهنة 5 بالضبط عن العلاقة بين الاشتقاق والاستمرار؟

أ) الاستمرار عند نقطة يعطي الاشتقاق عندها

ب) الاستمرار والاشتقاق متكافئان

ج) الاشتقاق عند نقطة يعطي الاستمرار عندها

9. ما وصف التابع $x \mapsto |x|$ عند الصفر؟

أ) مستمرّ وغير اشتقاقي

ب) مستمرّ واشتقاقي

ج) غير مستمرّ وغير اشتقاقي

10. لماذا يكون التابع $x \mapsto \sin x + \cos x$ مستمرّاً على $\mathbb{R}$ ؟

أ) ليس مستمرّاً، لأنّ الجيب متأرجح

ب) لأنّه مجموع تابعين مستمرّين على $\mathbb{R}$

ج) لأنّه دوري، وكلّ تابع دوري مستمرّ

11. التابعان u و v مستمرّان عند a ، و $v(a) = 0$. ماذا نقول عن $\frac{u}{v}$ عند a ؟

أ) لا يُسأل عن استمراره عند a ، فهو غير معرّف هناك

ب) مستمرّ عند a ، لأنّ البسط والمقام مستمرّان

ج) مستمرّ عند a إذا كان $u(a) = 0$ أيضاً

12. التابع u مستمرّ على $\mathbb{R}$ والتابع h مستمرّ على $\mathbb{R}$. ماذا نقول عن $x \mapsto h\big(u(x)\big)$ ؟

أ) مستمرّ على $\mathbb{R}$

ب) مستمرّ فقط عند النقاط التي يكون فيها $u(x) = x$

ج) لا يمكن الحكم قبل معرفة صيغتي التابعين

13. كيف نبرهن أنّ تابعاً مستمرّ عند نقطة a ؟

أ) نرسم خطّه البياني ونرى أنّه قطعة واحدة

ب) نحسب $\lim_{x \to a} f(x)$ ونقارنها بـ $f(a)$

ج) نتحقّق من كونه اشتقاقيّاً، وإن لم يكن اشتقاقيّاً فهو غير مستمرّ

14. ما مجموعة تعريف التابع $f : x \mapsto \sqrt{1 - \cos x}$ ؟

أ) $\mathbb{R}$ ، لأنّ $\cos x \leq 1$ دائماً

ب) $[0, +\infty[$

ج) الأعداد $x = 2k\pi$ وحدها

15. نعلم أنّ $\lim_{x\to 1} f(x) = 4$ وأنّ $f(1) = 4$. ما الحكم؟

أ) f اشتقاقي عند 1

ب) المعطيات لا تكفي للحكم على الاستمرار

ج) f مستمرّ عند 1

16. التابع $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ معرّف من أجل $x \neq 2$. بأيّ قيمة نعرّفه عند 2 ليصير مستمرّاً عندها؟

أ) بأيّ قيمة نختارها، فالاستمرار مسألة تعريف

ب) بالقيمة 4 ، وهي نهاية التابع عند 2

ج) لا يمكن، لأنّ المقام ينعدم عند 2

سلّم التصحيح

1. أ صحيح. هذا نصّ التعريف حرفيّاً: النهاية عند النقطة هي قيمة التابع عندها.

2. أ صحيح. بالاختصار $\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$ من أجل $x \neq 1$ ، فالنهاية 2 ، والقيمة المعطاة 3 . لا تساوي، فلا استمرار.

3. ب صحيح. معدّل التغيّر هو $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ، ونهايته غير منتهية، فلا اشتقاق. والمماس في المبدأ شاقولي.

4. ج صحيح. تابع كسري مستمرّ على مجموعة تعريفه كلّها، والصياغة الصحيحة تذكر المجموعة ولا تدّعي شيئاً عند 2 .

5. ج صحيح. النهايتان 1 و 2 مختلفتان، فلا نهاية عند 3 ، والخطّ البياني ينفصل هناك إلى قطعتين.

6. ب صحيح. توابع كثيرات الحدود اشتقاقيّة على $\mathbb{R}$ ، فهي مستمرّة عليها بحسب مبرهنة 5.

7. ج صحيح. ما تحت الجذر موجب تماماً على $\mathbb{R}$ ، والتابع مركّب من كثير حدود ومن الجذر، وكلاهما مستمرّ.

8. ج صحيح، وهذا اتّجاه واحد فقط. البرهان يمرّ بـ $f(x)-f(a)=(x-a)g(x)$ حيث g له نهاية منتهية هي $f'(a)$.

9. أ صحيح، وهذا أحد المثالين اللذين يذكرهما الكتاب في تنبيهاته: الاستمرار عند نقطة لا يعني قابليّة الاشتقاق فيها.

10. ب صحيح. الاستمرار ينتقل عبر الجمع، والتابعان مرجعيّان كلاهما.

11. أ صحيح. شرط الكتاب في القسمة هو أن يكون الخارج معرّفاً عند النقطة المدروسة، وهو ساقط هنا.

12. أ صحيح. مركّب تابعين مستمرّين مستمرّ، وهذا يأتي مباشرة من خاصّة نهاية التابع المركّب.

13. ب صحيح، وهذا نصّ ما يوصي به الكتاب: لدراسة استمرار f عند a نحسب النهاية ونحسب القيمة.

14. أ صحيح. المقدار $1-\cos x$ غير سالب مهما كانت x ، فلا قيد على x ، والتابع مستمرّ على $\mathbb{R}$ بوصفه مركّباً.

15. ج صحيح. الشروط الثلاثة محقّقة: القيمة موجودة، والنهاية موجودة، وهما متساويتان.

16. ب صحيح. بالاختصار $\frac{x^2-4}{x-2} = x+2$ من أجل $x \neq 2$ ، فالنهاية 4 ، وهي القيمة الوحيدة التي تجعل التابع مستمرّاً.

الاستمرار . المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 42 إلى 44 . basita123.com