بسيطة

الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

ورقة تمارين: التوابع المستمرّة وحلّ المعادلات

التوابع: النهايات والاستمرار . 16 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

---

1. التابع f مستمرّ على $[0,5]$، و $f(0)=-2$ و $f(5)=6$. ماذا تعطي مبرهنة القيمة الوسطى عن المعادلة $f(x)=0$ ؟

أ) حلّاً وحيداً في $[0,5]$

ب) لا شيء، لأنّ التابع غير مطّرد

ج) حلّاً واحداً على الأقلّ في $[0,5]$

2. ما الذي يضمن وحدانيّة حلّ المعادلة $f(x)=k$ على مجال؟

أ) الاطّراد التامّ للتابع على ذلك المجال

ب) استمرار التابع على ذلك المجال

ج) كون المجال مغلقاً

3. التابع f مستمرّ ومتزايد تماماً على $I=[1,4]$، و $f(1)=-3$ و $f(4)=5$. ما $f(I)$ ؟

أ) $]-3,\ 5[$

ب) $[1,\ 4]$

ج) $[-3,\ 5]$

4. التابع f معرّف على $I=[-3,2]$ وفق الصيغة الآتية. ما $f(I)$ ؟

$$f(x)=x^2+1$$

أ) $[5,\ 10]$

ب) $[1,\ 10]$

ج) $[1,\ 5]$

5. التابع f معرّف ومستمرّ على مجموعة الأعداد الحقيقية، وجدول تغيّراته هو الآتي. كم عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	3

أ) 2

ب) 3

ج) 1

6. لماذا لا تكفي مبرهنة القيمة الوسطى وحدها لتحديد عدد الحلول؟

أ) لأنّها تقول «يوجد على الأقلّ» ولا تقول «يوجد وحيد»

ب) لأنّها تشترط أن يكون التابع قابلاً للاشتقاق

ج) لأنّها لا تنطبق إلّا على المجالات المفتوحة

7. التابع f مستمرّ ومتزايد تماماً على $I =]0, 3]$ ، ونهايته عند 0 هي $-\infty$ ، و $f(3) = 4$. ما $f(I)$ ؟

أ) $[f(0),\ 4]$

ب) $]-\infty,\ 4[$

ج) $]-\infty,\ 4]$

8. تابع معرّف على $[1, 4]$ وغير مستمرّ، وله قفزة عند 2 . هل يكفي أن يكون k محصوراً بين قيمتَي التابع عند الطرفين ليوجد حلّ للمعادلة $f(x) = k$ ؟

أ) لا، فبلا استمرار قد تقفز القيم فوق k دون أن تبلغه

ب) نعم، فالحصر بين القيمتين وحده يكفي

ج) نعم، إذا كان التابع مطّرداً

9. التابع f مستمرّ ومطّرد على $[0, 5]$ ، لكنّه ليس مطّرداً تماماً. ماذا يمكن أن تكون مجموعة حلول المعادلة $f(x) = 1$ ؟

أ) نقطة واحدة لا غير، دائماً

ب) قد تكون مجالاً كاملاً من القيم

ج) المجموعة الخالية، دائماً

10. التابع f مستمرّ ومطّرد تماماً على $[2, 3]$ ، و $f(2) = -1$ و $f(3) = 8$. ماذا تستنتج عن المعادلة $f(x) = 0$ ؟

أ) لها حلّان في $]2, 3[$

ب) لها حلّ وحيد في $]2, 3[$

ج) لا يمكن الاستنتاج قبل حساب المشتقّ

11. ما الذي تمثّله حلول المعادلة $f(x) = k$ على الشكل؟

أ) تراتيب النقاط المشتركة بين C_f والمستقيم $y = k$

ب) فواصل النقاط المشتركة بين C_f ومحور الفواصل

ج) فواصل النقاط المشتركة بين C_f والمستقيم $y = k$

12. التابع f تقابل من I إلى J ، و g تقابله العكسي. أيّ العلاقات الآتية صحيحة أيّاً كان x من I ؟

أ) $g\big(f(x)\big) = f(x)$

ب) $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

ج) $g\big(f(x)\big) = x$

13. الخطّان البيانيان لتابع تقابل ولتقابله العكسي، في معلم متجانس، متناظران بالنسبة إلى أيّ مستقيم؟

أ) $y = x$

ب) $y = 0$

ج) $x = 0$

14. متى يكون التابع f تقابلاً من مجال I إلى $J = f(I)$ ؟

أ) حين يكون مستمرّاً ومطّرداً تماماً على I

ب) حين يكون مستمرّاً على I

ج) حين يكون قابلاً للاشتقاق على I

15. التابع f معرّف على مجموعة الأعداد الحقيقية وفق الصيغة الآتية. لماذا للمعادلة $f(x) = 0$ حلّ وحيد في $[2, 3]$ ؟

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$$

أ) لأنّ $f(2)$ و $f(3)$ مختلفتا الإشارة، وهذا وحده يكفي

ب) لأنّ f مستمرّ ومتزايد تماماً على $[2, 3]$ ، ولأنّ $f(2) \times f(3) < 0$

ج) لأنّ f كثير حدود من الدرجة الثالثة، ولكثيرات الحدود الفرديّة جذر واحد

16. التابع f مستمرّ على $[0, 4]$ ، و $f(0) = 2$ و $f(4) = 5$. هل يمكن أن يكون للمعادلة $f(x) = 0$ حلّ في هذا المجال؟

أ) لا، لأنّ قيمتَي الطرفين موجبتان

ب) نعم، فالمبرهنة لا تمنع ذلك

ج) لا، لأنّ 0 ليس محصوراً بين 2 و 5

سلّم التصحيح

1. ج صحيح. العدد 0 محصور بين -2 و 6 ، والتابع مستمرّ على المجال المغلق، فيوجد c واحد على الأقلّ يحقّق $f(c) = 0$.

2. أ صحيح. الاطّراد التامّ يمنع عددين مختلفين من أن تكون لهما الصورة نفسها، فالحلّ واحد على الأكثر.

3. ج صحيح. التابع مستمرّ ومتزايد تماماً على مجال مغلق، فالمبرهنة 7 تعطي $f(I) = [f(1),\ f(4)]$.

4. ب صحيح. القيمة الصغرى هي $f(0) = 1$ والقيمة العظمى هي $f(-3) = 10$ ، وصورة المجال المغلق وفق تابع مستمرّ هي $[m,\ M]$.

5. أ صحيح. صور مجالات الاطّراد هي $]-2, +\infty[$ و $[-2, 4]$ و $]3, 4[$. العدد 0 ينتمي إلى الأوّلين ولا ينتمي إلى الثالث، فالحلول اثنان.

6. أ صحيح. الكتاب يضيف صراحةً أنّ العدد c ليس وحيداً بالضرورة، ويرفق شكلاً فيه ثلاث نقاط تقاطع.

7. ج صحيح. المبرهنة 8 في حالة $I =]a, b]$ تعطي $f(I) =]\lim_{x\to 0} f(x),\ f(3)]$.

8. أ صحيح. هذا مثال الكتاب نفسه: المعادلة $f(x) = 4$ لها حلّ، والمعادلة $f(x) = 2$ لا حلّ لها، والقفزة هي السبب.

9. ب صحيح. مثال الكتاب تابع مطّرد غير مطّرد تماماً، وكلّ قيم المجال $[2, 3]$ فيه حلول للمعادلة $f(x) = 1$.

10. ب صحيح. $f(2) \times f(3) < 0$ مع الاستمرار والاطّراد التامّ، وهذه هي النتيجة المذكورة في الكتاب حرفاً بحرف.

11. ج صحيح. هذه هي القراءة الهندسيّة التي يفتتح بها الكتاب الوحدة، وهي أساس عدّ الحلول كلّه.

12. ج صحيح. ومعها العلاقة المقابلة $f\big(g(y)\big) = y$ أيّاً كان y من J . كلّ من التابعين يردّ ما فعله الآخر.

13. أ صحيح. النقطتان $M(x, y)$ و $M'(y, x)$ متناظرتان بالنسبة إلى هذا المستقيم، والتقابل العكسي يبدّل الفاصلة بالترتيب.

14. أ صحيح. الاستمرار يجعل J مجالاً ويضمن الوجود، والاطّراد التامّ يضمن أنّ لكلّ y من J أصلاً واحداً فقط.

15. ب صحيح. $f(2) = -1$ و $f(3) = 8$ ، والتابع متزايد تماماً بعد $\frac{4}{3}$ ، فتنطبق النتيجة وتعطي حلّاً وحيداً.

16. ب صحيح. مبرهنة القيمة الوسطى تعطي شرطاً كافياً للوجود لا شرطاً لازماً. حين لا تتبدّل الإشارة بين الطرفين لا نستنتج شيئاً، لا الوجود ولا الانعدام.

التوابع المستمرّة وحلّ المعادلات . المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 45 إلى 51 . basita123.com