



الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

## ورقة تمارين: خواص عدد التوافيق، ومنشور ذي الحدين

التحليل التوافقي . 12 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

1. أي الشرطين هو شرط علاقة باسكال  $\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$  ؟(أ)  $0 \leq r \leq n$ (ب)  $0 \leq r < n$ (ج)  $1 \leq r < n$ 2. ما قيمة  $\binom{40}{38}$  ؟

(أ) 780

(ب) 1560

(ج) 38

3. في مثلث الكرجي-باسكال كما يطبعه الكتاب، أين يقع العدد 10 الذي يساوي  $\binom{5}{3}$  ؟

(أ) في السطر الخامس المطبوع والعمود الثالث للأعداد

(ب) في السطر الرابع المطبوع والعمود الثاني للأعداد

(ج) في السطر السادس المطبوع والعمود الرابع للأعداد

4. في برهان منشور ذي الحدين بالتدريج يستعمل الكتاب علاقة باسكال في صورة  $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$  . ما شرط هذه الصورة؟(أ)  $0 \leq r \leq n$ (ب)  $1 \leq r \leq n$ 

(ج) لا شرط عليها، فهي متطابقة

5. في منشور  $(a+b)^8$  ، ما الحد  $T_3$  بحسب الصيغة التي تكتبها المبرهنة صفحة 139؟(أ)  $56a^5b^3$ (ب)  $56a^3b^5$ (ج)  $336a^5b^3$ 6. ما معامل  $x^3$  في منشور  $(2x-1)^5$  ؟

(أ) 10

(ب) 80

(ج) -80

7. ما الحدّ الثابت المستقلّ عن  $x$  في منشور  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^8$  ؟

أ) 1

ب) 28

ج) 70

8. مجموعة فيها سبعة عناصر. كم مجموعة جزئية لها في المجموع، بكلّ الأحجام؟

أ) 5040

ب) 35

ج) 128

9. ما شرط وجود حدّ ثابت مستقلّ عن  $x$  في منشور  $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$  ؟

أ) أن يكون  $n$  من مضاعفات الثلاثة

ب) أن يكون  $n$  زوجيّاً

ج) يوجد دائماً، لأنّ الأسّ يمرّ بالصفّر

10. ما قيمة  $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \dots + \binom{10}{10}$  ؟

أ) 252

ب) 1024

ج) 3628800

11. اختزل  $(1+x)^5 - (1-x)^5$ .

أ)  $2 + 20x^2 + 10x^4$

ب)  $10x + 20x^3 + 2x^5$

ج)  $10x + 10x^3 + x^5$

12. ما قيمة  $\binom{6}{0} - \binom{6}{1} + \binom{6}{2} - \binom{6}{3} + \binom{6}{4} - \binom{6}{5} + \binom{6}{6}$  ؟

أ) 0

ب) 64

ج) 2

## سَلِّم التصحيح

1. ج نعم، وهكذا يكتبه الكتاب صفحة 139. والحدّان من طرفي الشرط ليسا زينة: عند  $r = 0$  لا يوجد جزءٌ يحوي العنصر المثلث، وعند  $r = n$  لا يوجد جزءٌ لا يحويه، فينهار تقسيم النوعين الذي عليه البرهان.
2. أ نعم. بالتناظر  $\binom{40}{38} = \binom{40}{2} = \frac{40 \times 39}{2} = 780$ . وهذا هو نفع الخاصّة عملياً: تحويل رتبةٍ كبيرةٍ إلى صغيرةٍ قبل الحساب.
3. ج نعم، لأنّ العنوانين يبدآن من الصفر لا من الواحد. فالسطر المكتوب أمامه 5 هو سادس سطرٍ مطبوع، والعمود المكتوب فوقه 3 هو رابع عمودٍ للأعداد. من عدّ بالواحد أخطأ في كلّ قراءةٍ بعدها ولم يخطئ في حساب واحد.
4. ب نعم، وهكذا يكتبه الكتاب صفحة 140. وهي مبرهنة 2 نفسها بعد وضع  $n + 1$  مكان  $n$ : الشرط  $1 \leq r < n + 1$  هو  $1 \leq r \leq n$  لأنّ  $r$  عددٌ طبيعيّ. لا قاعدة جديدة، بل القاعدة نفسها بحروفٍ أخرى.
5. أ نعم.  $T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$ ، ف  $T_3 = \binom{8}{3} a^5 b^3 = 56 a^5 b^3$  ومجموع الأسّين  $5 + 3 = 8$ ، وهو تحقّق سريعٌ يكفي وحده.
6. ب نعم.  $a = 2x$  و  $b = -1$  و  $r = 2$ ، فالحّد  $\binom{5}{2} (2x)^3 (-1)^2 = 10 \times 8x^3 \times 1 = 80x^3$ . والإشارة موجبة لأنّ قوّة  $b$  زوجيّة.
7. ج نعم.  $T_r = \binom{8}{r} x^{8-2r}$ ، والثابت عند  $8 - 2r = 0$  أي  $r = 4$ ، ف  $\binom{8}{4} = 70$ . ولاحظ أنّ  $r = 4$  هو منتصف السطر، وهذا ليس مصادفةً في منشورٍ أشه زوجي.
8. ج نعم،  $2^7 = 128$ . وتحقّق بالجمع:  $1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128$ ، وهو مجموع السطر  $n = 7$  من المثلث، أي النتيجة صفحة 140 بعينها.
9. أ نعم. الأسّ هو  $2(n - r) - r = 2n - 3r$ ، والثابت عند  $2n = 3r$  أي  $r = \frac{2n}{3}$ . وهذا عددٌ طبيعيّ إذا وفقط إذا قسمت الثلاثة  $n$ . فلا حدّ ثابت عند  $n = 4$ ، وعند  $n = 6$  هو  $\binom{6}{4} = 15$ ، وعند  $n = 9$  هو  $\binom{9}{6} = 84$ .
10. ب نعم،  $2^{10} = 1024$ . وهذا هو المنشور عند  $a = b = 1$ : تختفي الحروف ويبقى  $2^n$  في مواجهة مجموع المعاملات. والقراءة الثانية للنتيجة نفسها: عدد كلّ أجزاء مجموعةٍ فيها عشرة عناصر.
11. ب نعم. المنشور الثاني هو الأوّل بإشاراتٍ متعاقبة، فحدود  $x$  الزوجيّة تتساوى وتزول بالطرح، والفرديّة تتضاعف:  $2 \left( \binom{5}{1} x + \binom{5}{3} x^3 + \binom{5}{5} x^5 \right) = 10x + 20x^3 + 2x^5$ .
12. أ نعم. هذا المنشور عند  $a = 1$  و  $b = -1$ ، أي  $0^6 = (1 - 1)^6$ . وبالحساب المباشر  $1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1 = 0$ . وهذه هي الحيلة نفسها التي في مثال الصفحة 142، بقيمةٍ أخرى لـ  $x$ .