بسيطة

الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

ورقة تمارين: نهاية متتالية : تذكرة

نهاية متتالية . 12 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

---

1. ما الذي يشترطه تعريف النهاية المنتهية بالضبط؟

أ) أن يضمّ كلُّ مجال مفتوح مركزه ℓ كلّ الحدود بدءاً من دليل

ب) أن يوجد مجالٌ مفتوح مركزه ℓ يضمّ كلّ الحدود بدءاً من دليل

ج) أن تقترب الحدود من ℓ كلّما كبر n

2. المتتالية $u_n = (-1)^n$. كلّ حدودها في المجال $[-1,\ 1]$. هل هي متقاربة؟

أ) نعم، ونهايتها صفر لأنّها تتناوب حول الصفر

ب) نعم، لأنّ عدد قيمها منتهٍ

ج) لا، وهذا يبيّن أنّ الحدّية لا تكفي للتقارب

3. ما نهاية q^n عند $q = -1$ ؟

أ) لا نهاية لها

ب) الصفر

ج) $-\infty$

4. وجدتَ أنّ $n_0 = 399$ يحقّق المطلوب. هل $n_0 = 500$ جوابٌ صحيح أيضاً؟

أ) لا، الجواب وحيدٌ لأنّه ناتج حساب

ب) نعم، وكذلك كلّ عددٍ أكبر

ج) لا، لأنّه أكبر من اللازم

5. لماذا يعيد الكتاب الحساب بـ α بعد أن حسبه بـ 0.01 ؟

أ) ليختصر الحساب في المرّات القادمة

ب) لأنّ التعريف يشترط كلّ مجال، ومجالٌ واحدٌ لا يبرهن شيئاً

ج) لأنّ 0.01 ليس دقيقاً بما يكفي

6. في الخطوة $n+1 > 400 \iff \dfrac{4}{n+1} < \dfrac{1}{100}$ ، ما الذي يبرّر قلب المتراجحة؟

أ) أنّ 4 و 100 عددان موجبان

ب) أنّ المتراجحة صارمة

ج) أنّ $n+1$ موجبٌ تماماً

7. المتتالية $u_n = 1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} - \cdots - \dfrac{1}{2^n}$. ما الخطوة الأولى؟

أ) حساب الحدود الأولى وتخمين النمط

ب) تطبيق مبرهنة الحصر

ج) وضع المطروحات في قوسٍ واحد، مع الانتباه إلى انقلاب الإشارات

8. متتاليةٌ كلّ حدودها موجبةٌ تماماً وهي متقاربة. ماذا نعرف عن نهايتها؟

أ) أنّها موجبةٌ تماماً

ب) أنّها تساوي الصفر

ج) أنّها موجبة، أي أكبر من الصفر أو تساويه

9. أيّ المتتاليات الآتية ليست من المتتاليات المرجعيّة التي يذكرها الكتاب؟

أ) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

ب) $u_n = (-1)^n$

ج) $u_n = n^2$

10. ما الفرق بين تعريف $\lim u_n = +\infty$ وتعريف $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ؟

أ) تعريف المتتالية أضعف، لأنّ n لا يأخذ إلّا قيماً صحيحة

ب) العتبة تصير دليلاً، ولا شيء غير ذلك

ج) لا علاقة بينهما، فالنهايتان مفهومان مختلفان

11. المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتان و $u_n < v_n$ عند كلّ n . ماذا نستنتج؟

أ) $\lim u_n \leq \lim v_n$

ب) $\lim u_n < \lim v_n$

ج) أنّ u_n و v_n لا يمكن أن تكون لهما النهاية نفسها

12. بعد اختصار المجموع وجدتَ $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. كلّ حدودها موجبةٌ تماماً. هل تبلغ الصفر؟

أ) لا. النهاية قيمةٌ تُقارَب ولا تُبلَغ هنا

ب) نعم، عند دليلٍ كبيرٍ بما يكفي

ج) لا، ولذلك نهايتها ليست الصفر

سلّم التصحيح

1. أ نعم، وهذه هي الكلمة الحاسمة: «كلُّ مجال». وهي السبب في أنّ الكتاب يعيد الحساب بتسامحٍ عامّ α بعد أن حسبه برقم.

2. ج نعم. مجالٌ واحدٌ يضمّها لا يعني شيئاً؛ خذ مجالاً ضيّقاً حول 1 وسترى أنّ نصف الحدود يقع خارجه، ونصفٌ لا نهائيٌّ منها.

3. أ نعم. المبرهنة تضع $q \leq -1$ في حالةٍ رابعة مستقلّة، وتقول صراحةً إنّه ليس للمتتالية نهاية.

4. ب نعم. السؤال يطلب عتبة، لا قيمة. أيّ عددٍ أكبر يحقّق الشرط أيضاً، وهذا ما يقوله الكتاب حرفيّاً.

5. ب نعم. الحساب برقمٍ يعطي مثالاً، والحساب بحرفٍ يعطي برهاناً، ما دام الحساب لم يستعمل قيمة الرقم في أيّ خطوة.

6. ج نعم، وهذه بالضبط الخطوة التي يضع الكتاب عندها كلمة «علّل». لو كان المقام سالباً لانقلبت الجهة مرّةً أخرى.

7. ج نعم. أمام القوس إشارة ناقص، فتصير إشارات الداخل موجبة، ويظهر مجموع متتاليةٍ هندسيّة أساسها $\frac{1}{2}$.

8. ج نعم، وهذا ما يبرهنه الكتاب بنقض الفرض. وهو أضعف ممّا يتوقّعه أكثر الطلاب، وهو الصحيح.

9. ب نعم. المتتاليات المرجعيّة كلّها لها نهاية، إمّا الصفر وإمّا $+\infty$. وهذه ليست لها نهايةٌ أصلاً، فهي المثال المضادّ لا المرجع.

10. ب نعم، وهذا ما يقوله الكتاب: التماثل بين التعريفين واضح، لأنّ المتتاليات حالاتٌ خاصّة من التوابع. $x > A$ تصير $n > n_0$.

11. أ نعم. في العبور إلى النهاية يصير $<$ هو $\leq$ ، وهذه قاعدةٌ تُحفظ.

12. أ نعم. $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ موجبةٌ تماماً عند كلّ n ، والنهاية صفر. لا تناقض بين الأمرين، وهذا بالضبط مضمون السؤال الأوّل في «تكريساً للفهم».

نهاية متتالية : تذكرة . المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 101 إلى 105 . basita123.com