الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

ورقة تمارين: متتاليات متجاورة

نهاية متتالية . 16 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

بسيطة

1. كم شرطاً يطلبه تعريف المتتاليتين المتجاورتين؟

أ) شرطان: إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة

ب) شرطٌ واحد: $\lim(s_n - t_n) = 0$

ج) ثلاثة: اطّرادٌ صاعد، واطّرادٌ نازل، وفرقٌ يسعى إلى الصفر

د) أربعة: الثلاثة، مع أن تكونا محدودتين

2. المتتاليتان $t_n = \dfrac{1}{n}$ و $s_n = \dfrac{2}{n}$ معرّفتان من أجل $n \geq 1$. هل هما متجاورتان؟

أ) لا، لأنّ كلتيهما متناقصة

ب) نعم، لأنّ الفرق $\dfrac{1}{n}$ يسعى إلى الصفر

ج) نعم، ونهايتهما المشتركة 0

3. في برهان مبرهنة 9، ما الذي يعطي $s_n \geq t_n$ ؟

أ) التعريف، فهو يرتّب t_n تحت s_n

ب) أنّ $(s_n - t_n)$ متناقصة ونهايتها صفر

ج) أنّ المتتاليتين محدودتان

4. ماذا تعطي مبرهنة 9 بالضبط؟

أ) وجود النهاية وقيمتها

ب) أنّ النهاية هي $\dfrac{t_0 + s_0}{2}$

ج) وجود نهايةٍ واحدة مشتركة للمتتاليتين

5. في المثال $t_{n+1} = \dfrac{t_n + 2s_n}{3}$ و $s_{n+1} = \dfrac{t_n + 3s_n}{4}$ ، ما أساس المتتالية الهندسيّة $h_n = s_n - t_n$ ؟

أ) $\frac{1}{7}$

ب) $\frac{1}{12}$

ج) $\frac{2}{3}$

6. لماذا كان $u_n = 3t_n + 8s_n$ ثابتاً مفيداً؟

أ) لأنّه يربط النهايتين بمعادلةٍ عدديّة: $99 = 11\ell$

ب) لأنّه يثبت أنّ المتتاليتين متجاورتان

ج) لأنّه يثبت أنّ المتتاليتين متقاربتان

7. في خوارزميّة تنصيف المجال لحصر $\sqrt{2}$ ، ما طول المجال بعد n خطوة؟

أ) $\frac{1}{2^n}$

ب) $\frac{1}{2n}$

ج) $\frac{1}{n^2}$

8. في الجدول، x_n يساوي $\dfrac{181}{128}$ من $n = 7$ إلى $n = 11$. ما تفسير ذلك؟

أ) خطأٌ في الجدول

ب) لأنّ (x_n) بلغت نهايتها عند $n = 7$

ج) في كلّ خطوة يتغيّر حدٌّ واحد فقط، والآخر يُنقل كما هو

9. المتتاليتان $x_n = 2 - \dfrac{1}{n}$ و $y_n = 2 + \dfrac{1}{n^2}$ من أجل $n \geq 1$: هل هما متجاورتان؟

أ) لا، لأنّ الفرق لا يسعى إلى الصفر

ب) نعم، ونهايتهما المشتركة 0

ج) نعم، ونهايتهما المشتركة 2

10. قبل تطبيق مبرهنة 9 على متتاليتين، ما الذي يجب التأكّد منه أوّلاً وكثيراً ما يُنسى؟

أ) أن تكون كلتاهما موجبة

ب) أن تكونا معرّفتين من الدليل نفسه

ج) أن يكون $t_0 < s_0$ صراحةً

11. المتتاليتان $a_n = 3 - \dfrac{1}{n}$ و $b_n = 3 + \dfrac{2}{n}$ ، من أجل $n \geq 1$ ، متجاورتان. أيّ متراجحة تصحّ لكلّ n ؟

أ) $a_n \geq b_n$ ، لأنّ الفرق يُكتب بالرمز الأوّل أوّلاً فيكون موجباً

ب) $b_n \geq a_n$ ، لأنّ (b_n) هي المتناقصة هنا

ج) لا تصحّ متراجحةٌ بينهما، لأنّ تعريف 5 لا يذكر الترتيب

12. الخطوة الثانية من برهان مبرهنة 9 تقول: $(s_n - t_n)$ متناقصةٌ ونهايتها صفر، فتقترب منه من فوق وكلّ حدودها موجبة. لكنّ $w_n = -\dfrac{1}{n}$ ، من أجل $n \geq 1$ ، نهايتها صفر وكلّ حدودها سالبة. أين الفرق؟

أ) (w_n) متزايدة لا متناقصة، والخطوة تستعمل الاطّراد مع النهاية معاً

ب) لا فرق يُذكر: (w_n) تقترب من الصفر من تحت، وكذلك يمكن لمتتاليةٍ متناقصة

ج) الفرق أنّ حدود $(s_n - t_n)$ موجبةٌ بحكم تعريف 5، فلا حاجة إلى هذه الخطوة

13. في خوارزميّة التنصيف، سمِّ m_n منتصف المجال $[x_{n-1}, y_{n-1}]$ ، وهو الحدّ الجديد في السطر n من الجدول: $m_1 = \dfrac{3}{2}$ ، $m_2 = \dfrac{5}{4}$ ، $m_3 = \dfrac{11}{8}$ ، $m_4 = \dfrac{23}{16}$ ، $m_5 = \dfrac{45}{32}$ ، ... وهي متقاربة من $\sqrt{2}$ ، لأنّ m_n طرفٌ للمجال $[x_n, y_n]$ الذي يحوي $\sqrt{2}$ وطوله $\dfrac{1}{2^n}$. فهل $(m_n)_{n\geq 1}$ مطّردة؟

أ) نعم، لأنّ كلّ متتالية متقاربة مطّردة

ب) نعم، لأنّها متزايدة: كلّ منتصفٍ أكبر من الذي قبله

ج) لا، وليس في ذلك ما ينقض تقاربها

14. في خوارزميّة التنصيف، m هو منتصف $[x_{n-1}, y_{n-1}]$. لماذا تكفي مقارنة m^2 بـ 2 لنعرف في أيّ نصفٍ يقع $\sqrt{2}$ ؟

أ) لأنّ التابع $x \mapsto x^2$ متزايد تماماً على $[0, +\infty[$ ، و m موجب

ب) لأنّ التابع $x \mapsto x^2$ متزايد تماماً على $\mathbb{R}$ كلّها

ج) لأنّ المنتصف m يقع دائماً تحت $\sqrt{2}$ ، والمقارنة تؤكّد ذلك فحسب

15. في مثال الكتاب $t_0 = 1$ و $s_0 = 12$ ، مع $t_{n+1} = \dfrac{t_n + 2s_n}{3}$ و $s_{n+1} = \dfrac{t_n + 3s_n}{4}$. ما t_1 و s_1 ؟

أ) $t_1 = \frac{25}{3},\ s_1 = \frac{133}{12}$

ب) $t_1 = \frac{25}{3},\ s_1 = \frac{37}{4}$

ج) $t_1 = \frac{37}{4},\ s_1 = \frac{25}{3}$

16. في المثال نفسه، حيث $t_{n+1} - t_n = \dfrac{2}{3}(s_n - t_n)$ و $s_{n+1} - s_n = -\dfrac{1}{4}(s_n - t_n)$: ما الشرط على العددين a و b غير المعدومين حتّى تكون المتتالية (v_n) المعرّفة بـ $v_n = at_n + bs_n$ ثابتة؟

أ) $3a = 2b$

ب) $8a = 3b$

ج) $3a = 8b$

د) $a = b$

سلّم التصحيح

1. ج نعم، والثلاثة تُقرأ معاً. إسقاط أيّ واحدٍ منها يهدم النتيجة.

2. أ نعم. فرقهما $\dfrac{1}{n}$ يسعى إلى الصفر فعلاً، لكنّ التعريف يطلب أن تصعد إحداهما وتنزل الأخرى.

3. ب نعم. متناقصةٌ تسعى إلى الصفر تقترب منه من فوق: لو كان حدٌّ منها سالباً لبقي كلّ ما بعده لا يزيد عنه، ولنزلت النهاية تحت الصفر.

4. ج نعم، الوجود والاشتراك. القيمة ليست جزءاً من المبرهنة.

5. ب نعم. $h_{n+1} = \dfrac{3t_n + 9s_n}{12} - \dfrac{4t_n + 8s_n}{12} = \dfrac{1}{12}(s_n - t_n)$.

6. أ نعم. الثبات يعطي عدداً، والعمليات على النهايات تحوّله إلى $11\ell = 99$ ، ومنه $\ell = 9$.

7. أ نعم. الطول يُنصَّف في كلّ خطوة، والطول الابتدائي $y_0 - x_0 = 1$.

8. ج نعم، ولهذا المتتاليتان متزايدة ومتناقصة بالمعنى الواسع، لا تماماً.

9. ج نعم. (x_n) متزايدة، (y_n) متناقصة، و $y_n - x_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$ يسعى إلى الصفر.

10. ب نعم. $s_n = \dfrac{n+1}{n}$ يفرض $n \geq 1$ ، ومقارنتها بمتتاليةٍ من $n \geq 0$ بلا انتباهٍ خطأ.

11. ب نعم. بالحساب $a_1 = 2$ و $a_2 = \dfrac{5}{2}$ ، فـ (a_n) هي الصاعدة؛ و $b_1 = 5$ و $b_2 = 4$ ، فـ (b_n) هي النازلة. والخطوة الثانية من برهان مبرهنة 9 تعطي في هذه الحالة $b_n \geq a_n$ بالمعنى الواسع. أمّا كون الفرق $b_n - a_n = \dfrac{3}{n}$ موجباً تماماً فمن حساب هذا المثال، لا من المبرهنة.

12. أ نعم، والشرطان يعملان معاً. لو كان في متتاليةٍ متناقصة حدٌّ سالبٌ تماماً عند دليلٍ ما، لبقي كلّ ما بعده لا يزيد عنه، فما بلغت النهاية الصفر. أمّا (w_n) فتصعد نحو الصفر من تحت، والنهاية وحدها لا تمنع الحدود السالبة. ولهذا يثبت البرهان في خطوته الأولى أنّ $(s_n - t_n)$ متناقصة، قبل أن يستعمل نهايتها في الثانية.

13. ج نعم. $m_1 = \dfrac{3}{2}$ ثمّ $m_2 = \dfrac{5}{4}$ نزول، ثمّ $m_3 = \dfrac{11}{8}$ و $m_4 = \dfrac{23}{16}$ صعودان، ثمّ $m_5 = \dfrac{45}{32}$ نزول: لا قاعدة في الاتّجاه. ومع ذلك تتقارب، لأنّ الحصر يضيق في كلّ خطوة. وفقرة «أخطاء يجب تجنّبها» في آخر الوحدة تقول ذلك: متتالية متقاربة ليست بالضرورة مطّردة. أمّا مبرهنة 9 فتنطبق على (x_n) و (y_n) لأنّهما متجاورتان بالشروط الثلاثة، لا على (m_n) .

14. أ نعم، وهي أوّل جملةٍ في القسم الأخير من الدرس، حيث نحصر $\sqrt{2}$: «التابع $x \mapsto x^2$ متزايدٌ تماماً على $[0, +\infty[$ ، وهذا وحده يكفي». و m محصورٌ بين x_{n-1} و y_{n-1} وهما موجبان، فهو موجب. والتزايد التامّ ينقل الترتيب بين عددين موجبين إلى الترتيب بين مربّعيهما، في الاتّجاهين: من $m > \sqrt{2}$ يخرج $m^2 > 2$ ، ومن $m^2 < 2$ يخرج $m < \sqrt{2}$. فمقارنةٌ واحدة تعيّن الحدّ الذي يُستبدل، من دون أن نعرف $\sqrt{2}$ نفسه.

15. ب نعم. $t_1 = \dfrac{1+2(12)}{3} = \dfrac{25}{3}$ و $s_1 = \dfrac{1+3(12)}{4} = \dfrac{37}{4}$. والحصر ضاق كما يصفه أوّل الدرس: $1 < \dfrac{25}{3} < \dfrac{37}{4} < 12$ ، والفرق نزل من $h_0 = 11$ إلى $h_1 = \dfrac{11}{12}$ ، موافقاً للخطوة الأولى من الحلّ: $h_{n+1} = \dfrac{1}{12}h_n$. والنهاية 9 واقعة بين الحدّين الجديدين.

16. ب نعم. بالطرح $v_{n+1} - v_n = \left(\dfrac{2a}{3} - \dfrac{b}{4}\right)(s_n - t_n)$ ، والفرق $s_n - t_n$ موجبٌ دائماً بالخطوة الأولى من الحلّ، فالشرط هو $\dfrac{2a}{3} = \dfrac{b}{4}$ ، أي $8a = 3b$. وهذا يفسّر نسبة الوزنين $8 : 3$ في $u_n = 3t_n + 8s_n$ ، والكتاب اختار أصغر زوجٍ صحيحٍ يحقّقها؛ و $(6, 16)$ يصلح أيضاً وقيمته 198 .

متتاليات متجاورة . المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 115 إلى 118 . basita123.com