الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

ورقة تمارين: مبرهنات تخصّ النهايات

نهاية متتالية . 12 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

بسيطة

1. متى تسمح مبرهنة 2 بنقل نهاية التابع إلى المتتالية؟

أ) إذا كانت المتتالية متقاربة

ب) إذا كان f معرّفاً على $\mathbb{R}$ كلّه

ج) إذا كان $u_n = f(n)$ بدءاً من دليلٍ معيّن، و f معرّفاً على مجالٍ من النمط $]b, +\infty[$

2. التابع $f(x) = \sin(\pi x)$ ليست له نهايةٌ عند $+\infty$ ، والمتتالية $u_n = f(n)$ تساوي الصفر عند كلّ n . ماذا يبيّن هذا المثال؟

أ) أنّ مبرهنة 2 خاطئة

ب) أنّ $\sin$ ليس تابعاً مألوفاً

ج) أنّ مبرهنة 2 لا تُقرأ بالعكس

3. لحساب $\lim \sqrt{\dfrac{4n-3}{n+1}}$ ، عند أيّ نقطةٍ تُدرس نهاية تابع الجذر؟

أ) عند $+\infty$

ب) عند 4

ج) عند 0

4. مبرهنة 4 تحتاج متتاليتين تحيطان بـ (u_n) . ماذا يُشترط في نهايتيهما؟

أ) أن تكون كلٌّ منهما موجودة

ب) أن تكونا عدداً حقيقيّاً واحداً ℓ

ج) أن تكونا موجبتين

5. في أيّ الحالات الآتية تعجز قواعد الحساب على النهايات، فتلزم المقارنة؟

أ) $u_n = \dfrac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}$

ب) $u_n = \dfrac{2n+3}{3n-1}$

ج) $u_n = n + 1 - \cos n$

6. لماذا لا تصلح المتراجحة $u_n - \ell \le e_n$ في مبرهنة 5؟

أ) لأنّها تحصر المتتالية من الأعلى وتتركها حرّةً من الأسفل

ب) لأنّ e_n قد يكون سالباً

ج) لأنّ المبرهنة تشترط التساوي لا المتراجحة

7. المتتاليتان تحقّقان $u_n \leq v_n$ بدءاً من دليل، و $\lim v_n = +\infty$. ماذا نستنتج؟

أ) لا شيء

ب) أنّ $\lim u_n = +\infty$

ج) أنّ (u_n) محدودة من الأعلى

8. في المتراجحة $n \geq 2\sqrt{n}$ التي يستعملها الكتاب، من أيّ دليلٍ تصير صحيحة؟

أ) من $n = 4$

ب) من $n = 1$

ج) من $n = 2$

9. ما معنى أن تعطي القواعد الصيغة $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ ؟

أ) أنّ النهاية تساوي واحداً

ب) أنّ القواعد وحدها لا تكفي، ويلزم تحويل التعبير

ج) أنّ النهاية غير موجودة

10. عند دراسة $u_n = n - \sqrt{n}$ ، ماذا يحدث لو أخرجتَ $\sqrt{n}$ بدل n ؟

أ) تصل إلى النتيجة نفسها بالسرعة نفسها

ب) تحصل على صفر

ج) تحصل على جداءٍ لا يستقرّ عامله الثاني عند عددٍ غير معدوم

11. المتتالية $u_{n+1} = f(u_n)$ متقاربة من ℓ الحقيقيّ، و f مستمرٌّ عند ℓ . أيّ خطوةٍ تسمح بتمرير النهاية إلى داخل f ؟

أ) قاعدة نهاية الجداء

ب) مبرهنة 3، لأنّ $f(u_n)$ تركيبُ تابعٍ مع متتالية

ج) مبرهنة 2، لأنّ الحدّ العامّ مكتوبٌ بتابع

12. حلّ المعادلة $f(x) = x$ وجدتَ له قيمتين موجبتين. ماذا يعني ذلك للمتتالية $u_{n+1} = f(u_n)$ ؟

أ) أنّ لها نهايتين

ب) أنّها غير متقاربة

ج) أنّ لديك مرشّحَين، ويلزمك دليلٌ إضافيّ لتقرّر

سلّم التصحيح

1. ج نعم، وهذان الشرطان مكتوبان في نصّ المبرهنة. لاحظ «بدءاً من دليل»: لا يلزم أن يكون التساوي صحيحاً عند كلّ n .

2. ج نعم. المتتالية لا ترى من التابع إلا النقاط الصحيحة، فقد تستقرّ هي بينما يتأرجح هو.

3. ب نعم. الداخل يسعى إلى 4 ، فمبرهنة 3 تطلب $\lim_{x\to 4}\sqrt{x}=2$. النقطة هي نهاية الداخل.

4. ب نعم، ونصّ المبرهنة يقول «يوجد عددٌ حقيقيٌّ ℓ » يحقّق النهايتين معاً. عددٌ واحد، وحقيقيّ.

5. أ نعم. $\cos(2n)$ ليست له نهاية، فقاعدة الجداء لا تنطبق أصلاً. تصلح هنا مبرهنة 5 عبر $|u_n|\le\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ، وكذلك مبرهنة 4 بالحصر بين $-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ و $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ، وهذا ما يطلبه الكتاب في تمرين الصفحة 109.

6. أ نعم. من دون القيمة المطلقة قد يهوي u_n إلى $-\infty$ والمتراجحة تبقى صحيحة. القيمة المطلقة هي التي تُغلق الجهتين.

7. أ نعم. مبرهنة 6 تعمل في اتّجاهين محدّدين: الصغرى إلى $+\infty$ ترفع الكبرى، والكبرى إلى $-\infty$ تخفض الصغرى. حالتك ليست إحداهما.

8. أ نعم. عند $n\ge 4$ يكون $\sqrt{n}\ge 2$ ، والضرب بـ $\sqrt{n}$ الموجب يعطي $n\ge 2\sqrt{n}$. وهذا بالضبط ما تسمح به عبارة «بدءاً من دليل».

9. ب نعم. الكتاب يقول صراحةً إنّه ليس ثمّة قواعد عامّة، بل حيلتان: الانتقال إلى التابع، وإخراج الحدّ المسيطر.

10. ج نعم. علامة الخطوة الناجحة أن يسعى ما في القوس إلى عددٍ غير معدوم. مع n يصير القوس $1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ونهايته واحد.

11. ب نعم، ومع الاستمرار عند ℓ تصير $\lim f(u_n)=f(\ell)$. وبما أنّ (u_{n+1}) هي (u_n) بلا حدّها الأوّل، ينتج $f(\ell)=\ell$.

12. ج نعم. الإطار يقول إنّ ℓ حلٌّ للمعادلة، لا إنّ كلّ حلٍّ نهاية. وهو يفترض التقارب أصلاً ولا يبرهنه.

مبرهنات تخصّ النهايات . المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 106 إلى 109 . basita123.com