الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

بسيطة

ورقة تمارين: عموميّات عن المتتاليات

تذكرة بالمتتاليات، والإثبات بالتدريج . 12 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

---

1. المتتالية (u_n) معرَّفة بالحدّ العامّ $u_n = \dfrac{1}{n^2-4}$. ما أصغر دليلٍ ابتدائيّ صالح؟

أ) $n_0 = 3$

ب) $n_0 = 0$

ج) $n_0 = 2$

2. كم حدّاً للمتتالية $u_n = (-1)^n$ ؟

أ) حدّان اثنان، لأنّها لا تأخذ إلّا القيمتين 1 و -1

ب) لا يمكن تحديد العدد ما دام الدليل الابتدائيّ غير معطى

ج) عددٌ لا نهائيّ من الحدود

3. متى يكون التعريف التدريجيّ $u_{n+1} = f(u_n)$ مع $u_0 \in D$ سليماً إلى ما لا نهاية؟

أ) إذا كان $f(x)$ عنصراً من D مهما يكن x من D

ب) إذا كان u_0 عنصراً من D

ج) إذا كان f مطّرداً على D

4. المتتالية $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n}$ على $n \geq 1$. ما إشارة $u_{n+1} - u_n$ ، ولماذا؟

أ) موجبة، لأنّ كلّ حدود المتتالية موجبة

ب) موجبة تماماً، لأنّ الفرق يساوي $\dfrac{n^2+n-1}{2n(n+1)}$ والمقام موجب

ج) تتغيّر مع n ، فلا يمكن الحكم من دون تجربة قيم

5. $v_n = (n-1)^2$. الكتاب يستنتج أنّ $(v_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً. لماذا لا يكتب $n \geq 0$ ؟

أ) لأنّ v_0 غير معرَّف

ب) لأنّ $f(x) = (x-1)^2$ لا يتزايد إلّا على $[1, +\infty[$ ، وفعلاً $v_0 > v_1$

ج) لأنّ الدليل الابتدائيّ يُختار دائماً 1 في المتتاليات المعرَّفة بتابع

6. متى تصلح أداة النسبة $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ لدراسة الاطراد؟

أ) دائماً، ما دام $u_n \neq 0$

ب) إذا كانت المتتالية هندسيّة

ج) إذا كانت حدود المتتالية موجبةً تماماً

7. متتالية حسابيّة $u_1 = -2$ وأساسها $r = 3$. كم يساوي u_{20} ؟

أ) 58
ب) 57
ج) 55

8. كم حدّاً في المجموع $u_{25} + u_{26} + \cdots + u_{125}$ ؟

أ) 100
ب) 125
ج) 101

9. لماذا تُكتب صيغة المجموع الهندسيّ بالشرط $q \neq 1$ ؟

أ) لأنّ المتتالية عند $q = 1$ لا تكون هندسيّة
ب) لأنّ المقام $1 - q$ ينعدم، والمجموع عندئذٍ يساوي $n \times a$
ج) لأنّ q^n لا تُعرَّف عند $q = 1$

10. في المطابقة $x^n - a^n = (x - a)\left(x^{n-1} + \cdots + a^{n-1}\right)$ ، كم حدّاً في القوس الثاني عند $n = 5$ ؟

أ) أربعة
ب) خمسة
ج) ستّة

11. a و b و c ثلاثة حدودٍ متوالية من متتالية هندسيّة أساسها q . أيّ العلاقات الآتية صحيحة؟

أ) $b = a\,q \quad , \quad c = a\,q^2$
ب) $b = a + q \quad , \quad c = b + q$
ج) $b = a\,q \quad , \quad c = b\,q^2$

12. في المتتالية $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = u_n^2 - 2$ نجد $u_1 = 7$ و $u_2 = 47$ و $u_3 = 2207$ ، وكلّها تنتهي بالرقم 7 . ماذا يمكن أن نستنتج؟

أ) أنّ المقولة مُرجَّحة، ولا تُثبت إلّا بأداةٍ تشمل كلّ n
ب) أنّ كلّ الحدود ذات الدليل الأكبر من 1 تنتهي بالرقم 7
ج) أنّ المقولة خاطئة، لأنّ ثلاث حالاتٍ لا تكفي

سلّم التصحيح

1. أ نعم. المقام ينعدم عند $n = 2$ ، فأوّل دليلٍ طبيعيّ صالحٍ بعده هو 3 ، ولا ينعدم المقام بعده أبداً.

2. ج نعم، والكتاب يقول ذلك صراحةً: للمتتالية عددٌ لا نهائيّ من الحدود بقطع النظر عن قيم هذه الحدود.

3. أ نعم، وهذا مضمون إطار «بوجه عام» في الكتاب. من دونه قد تخرج المتتالية من مجالها بعد خطوةٍ أو خطوتين وتتوقّف.

4. ب نعم. المقام موجبٌ تماماً عند $n \geq 1$ ، فالإشارة إشارة البسط، و $n^2 + n - 1 = n^2 + (n-1)$ موجبٌ تماماً هناك.

5. ب نعم. $f'(x) = 2(x-1)$ موجبٌ عند $x > 1$ فقط، و $v_0 = 1$ أكبر من $v_1 = 0$. الأداة تنقل الاطراد على المجال الذي ثبت عليه وحده.

6. ج نعم، والكتاب يذكر الشرط في السطر نفسه. من دونه قد يخرج الجواب معكوساً تماماً.

7. ج نعم. بصيغة القفز $u_{20} = u_1 + (20-1)\times 3 = -2 + 57 = 55$. لاحظ 19 خطوة، لا 20 .

8. ج نعم، $125 - 25 + 1 = 101$. الطرفان محسوبان معاً، ولهذا يُزاد واحد.

9. ب نعم. الشرط يحمي القسمة، والحالة المستبعدة هي أسهل الحالات: n حدّاً متساوياً، فالمجموع n مضروباً بالحدّ.

10. ب نعم. الحدود هي كلّ $x^{\alpha}a^{\beta}$ مع $\alpha + \beta = 4$ ، وعددها n أي خمسة.

11. أ نعم، وهي صيغة القفز $u_m = u_p\, q^{\,m-p}$ مطبَّقةً بخطوةٍ ثمّ بخطوتين.

12. أ نعم. الاستقراء من حالاتٍ يعطي فرضيّة لا برهاناً. الفرق بين الاثنين هو موضوع الدرس التالي كلّه.

عموميّات عن المتتاليات . المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 7 إلى 11 . basita123.com