بسيطة

الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

ورقة تمارين: البرهان بالتدريج، أو بالاستقراء الرياضي

تذكرة بالمتتاليات، والإثبات بالتدريج . 16 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

---

1. لماذا لا يكفي التحقّق من $E(1)$ و $E(2)$ و $E(3)$ ؟

أ) لأنّ عدد الحالات غير منتهٍ، والتحقّق من ثلاثٍ لا يقول شيئاً عن الباقي

ب) يكفي، فثلاث حالاتٍ صحيحة تكفي للتعميم

ج) لأنّ الحساب عند $n = 4$ صعب

2. ما الذي تقوله الصورة (السُّلَّم) بالأزرق؟

أ) جملتان: أنّنا نبلغ الدرجة القاعديّة، وأنّنا نصعد من p إلى $p + 1$

ب) جملة واحدة: أنّنا نصعد من درجةٍ إلى التي تليها

ج) أسماء الدرجات

3. في الخطوة ②، أيّ العبارتين مفروضة وأيّهما مطلوبة؟

أ) $E(p+1)$ مفروضة و $E(p)$ مطلوبة

ب) $E(p)$ مفروضة و $E(p+1)$ مطلوبة

ج) كلتاهما مفروضة

4. الخطوة ⓪ التي أضافها الكتاب في «تكريساً للفهم» تطلب أمرين. ما هما؟

أ) حساب $E(0)$ و $E(1)$ معاً

ب) كتابة الخاصّة $E(n)$ بوضوح، وتحديد الدليل الابتدائيّ n_0

ج) اختيار الحرف p أو n

5. في مثال المكعّبات، ما $E(n+1)$ تحديداً؟

أ) $\frac{(n+1)^2(n+1)^2}{4}$

ب) $\frac{n^2(n+2)^2}{4}$

ج) $\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

6. في مثال قابليّة القسمة، لماذا كُتب $4^{n+1} + 2$ بالشكل $4(4^n + 2) - 6$ ؟

أ) لأنّه أقصر

ب) لأنّ هذا الشكل يُظهر المقدار المفروض $4^n + 2$ داخل الحساب

ج) لأنّ 6 مضاعفٌ للعدد 3

7. لماذا فُحصت $E(0)$ في المثال الثاني و $E(1)$ في الأوّل؟

أ) لأنّ كلّ خاصّةٍ تبدأ من دليلها الخاصّ، و n_0 يختلف بين المسألتين

ب) لأنّ $4^n + 2$ غير معرّف عند $n = 1$

ج) لأنّ الدليل الابتدائيّ يكون 1 دائماً في المساواة و 0 في القسمة

8. طالبٌ برهن الخطوة ② صحيحةً، لكنّه لم يفحص الحالة القاعديّة. ماذا أثبت؟

أ) لا شيء عن صحّة الخاصّة

ب) أثبت الخاصّة عند كلّ $n \geq n_0$

ج) أثبت الخاصّة عند n_0

9. ما معنى قول الكتاب «أثبتنا صحّتها اعتماداً على صحّة $E(n)$ »؟

أ) أنّ $E(n)$ و $E(n+1)$ متكافئتان

ب) أنّ $E(n)$ صحيحة عند كلّ n

ج) أنّ الافتراض استُعمل فعلاً في سطور الحساب

10. أيّ الصيغتين يستعملها الكتاب اسماً لهذا الأسلوب؟

أ) «الاستقراء الرياضي» وحده

ب) «البرهان بالخُلف»

ج) «الإثبات بالتدريج» و«الاستقراء الرياضي» معاً، وهما اسمان لشيءٍ واحد

11. استعمل طالبٌ الحرف p في سطرٍ من الخطوة ② والحرف n في السطر التالي للدور نفسه. ما الحكم؟

أ) لا بأس، فالكتاب نفسه يستعمل الحرفين

ب) خطأ انضباط: يُختار حرفٌ واحد للدور نفسه في البرهان كلّه

ج) يجب استعمال p دائماً، فهي صيغة الكتاب

12. طالبٌ أراد إثبات الخطوة ② في مثال $4^n + 2$ ، فحسب $4^3 + 2 = 66$ و $4^4 + 2 = 258$ ووجدهما مضاعفين للعدد 3 . ماذا فعل؟

أ) برهن الانتقال، لأنّ الحالتين متتاليتان

ب) تحقّق من حالتين أخريين ولم يبرهن الانتقال

ج) برهن، لأنّ حالتين بعد الحالة القاعديّة تكفيان

13. لماذا يبدأ الكتاب بكتابة $E(n)$ بوضوح قبل أيّ حساب؟

أ) لأنّك من دون نصّ $E(n)$ لا تستطيع التحقّق أنّ سطرك الأخير هو $E(n+1)$

ب) ليست خطوةً ضروريّة، يكفي أن تبدأ الحساب مباشرةً

ج) لترتيب البرهان وتنسيقه فقط

14. في تمرين الكتاب $S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ، ما $E(n+1)$ ؟

أ) $\frac{(n+1)(n+2)(2n+1)}{6}$

ب) $\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

ج) $\frac{(n+1)(n+2)(2n+2)}{6}$

15. متى ينتهي البرهان بالتدريج؟

أ) بانتهاء حساب الخطوة ②

ب) بالتحقّق من الحالة القاعديّة

ج) بجملةٍ تقول إنّ $E(n)$ صحيحة مهما كان $n \geq n_0$

16. في تمرين الكتاب: $x > -1$ والخاصّة $E(n)$ هي $(1+x)^n \geq 1+nx$ في حالة $n \geq 0$. ما الحالة القاعديّة؟

أ) $(1+x)^1 \geq 1+x$ ، وهي محقّقة

ب) لا يمكن الفحص عند 0 لأنّ x قد يكون سالباً

ج) $(1+x)^0 \geq 1+0\cdot x$ ، أي $1 \geq 1$

سلّم التصحيح

1. أ نعم. الكتاب يحسبها ثمّ يسأل صراحةً كيف نبرهن، «ونحن لا نمتلك القدرة على التحقُّق عدداً غيرَ منتهٍ من المرات». الحالات الثلاث سببُ الحاجة إلى التدريج، لا بديلٌ عنه.

2. أ نعم، والأزرق هو ما نقدر عليه، بينما البنفسجيّ يسمّي الدرجات. هاتان الجملتان هما الخطوتان ① و ②.

3. ب نعم. الفعلان يفصلان الدورين: «نفترض» للمفروض، «نبرهن» للمطلوب.

4. ب نعم. ومن لا يكتب ما تقوله $E(n)$ بالضبط، لا يستطيع لاحقاً أن يتحقّق أنّ سطره الأخير هو $E(n+1)$.

5. ج نعم: ضع $n+1$ مكان n في $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ فتحصل عليها. وإلى هذا الشكل بالذات وصل الحساب.

6. ب نعم. الخطوة ② لا تحسب شيئاً جديداً، بل تُعيد الترتيب حتّى يظهر الافتراض ويُستعمل.

7. أ نعم. الكتاب يقول «وفي أغلب الأحيان يكون $n_0 = 0$ أو $n_0 = 1$ » ويصنع الحالتين.

8. أ نعم. أثبت انتقالاً بلا منطلق. لو كانت $E(n)$ خاطئةً عند كلّ n ، لبقي الانتقال صحيحاً وبلا فائدة.

9. ج نعم. إن لم يظهر المفروض في الحساب، فما جرى تحقّقٌ من حالةٍ أخرى، لا انتقال.

10. ج نعم، والعنوان نفسه يجمعهما: «البرهان بالتدريج، أو بالاستقراء الرياضي».

11. ب نعم. الحرفان مقبولان كلٌّ على حدة، وغير المقبول أن يتناوبا على الدور الواحد في برهانٍ واحد.

12. ب نعم. الخطوة ② تُبرهن بالحساب الحرفيّ $4^{n+1} + 2 = 4(4^n + 2) - 6$ ، لا بأرقام. وهذا هو الفرق الذي بدأ به الدرس.

13. أ نعم. $E(n+1)$ تُعرَّف بوضع $n+1$ مكان n في $E(n)$ ، فمن لم يكتب $E(n)$ لا يملك ما يقارن به.

14. ب نعم. ضع $n+1$ مكان n في كلّ موضع: $n \to n+1$ ، $n+1 \to n+2$ ، $2n+1 \to 2n+3$.

15. ج نعم. تلك الجملة هي حصاد التدريج، وهي التي تجمع الخطوتين في نتيجةٍ واحدة.

16. ج نعم، وهي محقّقة. الطرفان يساويان 1 ، والمتراجحة الواسعة تقبل التساوي.