



الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

ورقة تمارين: نهايات مهمة تتعلق بالتابع اللوغاريتمي

التابع اللوغاريتمي . 12 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

1. ما قيمة $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$ ؟

أ) 1

ب) $+\infty$

ج) 0

2. ما قيمة $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} (x \ln x)$ ؟

أ) $-\infty$

ب) 0

ج) حالة عدم تعيين لا تُحسم

3. ما قيمة $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ ؟

أ) 1

ب) 0

ج) $+\infty$

4. ما قيمة $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x}$ ؟

أ) 0

ب) $+\infty$

ج) 1

5. ما قيمة $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x}$ ؟

أ) 0

ب) $+\infty$

ج) 1

6. ما قيمة $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right)$ ؟

أ) $+\infty$

ب) $-\infty$

ج) 0

7. ما قيمة $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2x+1) - \ln(x+2))$ ؟

أ) $\ln 2$

ب) 0

ج) $+\infty$

8. ما قيمة $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$ ؟

أ) 0

ب) $+\infty$

ج) 1

9. ما قيمة $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$ ؟

أ) 1

ب) 0

ج) $+\infty$

10. ما قيمة $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} ((x^2 - x) \ln x)$ ؟

أ) 0

ب) $+\infty$

ج) $-\infty$

11. ما قيمة $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$ ؟

أ) 0

ب) $+\infty$

ج) 1

12. عند حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2x + 1) - \ln(x + 2))$ ، ما الخطوة الأولى الصحيحة؟

أ) حساب نهاية كل حد على حدة ثم طرح

ب) إهمال الثابتين 1 و 2 لأنهما صغيران أمام x

ج) ضم الفرق في لوغاريتم واحد

سَلَم التصحيح

1. ج نعم. اللوغاريتم يصغر أمام x ، ويُثبت ذلك بالحصص $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$.
2. ب نعم. الصفر يغلب هنا: يُبرهن ذلك بتغيير المتحول $u = \frac{1}{x}$ ، فيصير المقدار $-\frac{\ln u}{u}$.
3. أ نعم، وهي نسبة التغير للتابع $\ln$ عند الفاصلة 1 ، فقيمتها $\ln'(1) = 1$.
4. ب نعم، وهو مقلوب النهاية $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$. ومقلوب مقدار يتلاشى بقيم موجبة يكبر بلا حدّ.
5. ج نعم، وهو مقلوب $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ ، وهذه الأخيرة نسبة التغير عند 1 .
6. أ نعم. نكتب المجموع كسراً واحداً $\frac{1+x \ln x}{x}$ ، فالبسط يسعى إلى 1 والمقام يتلاشى بقيم موجبة.
7. أ نعم. نضمّ الفرق في لوغاريتم واحد $\ln \frac{2x+1}{x+2}$ ، والكسر يسعى إلى 2 ، واللوغاريتم مستمرّ هناك.
8. ج نعم. بوضع $u = \frac{1}{x}$ يصير المقدار $\frac{\ln(1+u)}{u}$ مع $u \rightarrow 0$ ، وهذه هي النهاية الأولى من هذا الدرس.
9. ب نعم. اكتب الكسر جداءاً: $\frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x}$ ، وكلا العاملين يتلاشى. والمقام هنا أسرع من الحالة الأساسية.
10. أ نعم. انشر الجداء: $x(x \ln x) - x \ln x$ ، وكلا الحدين يسعى إلى الصفر بحكم المبرهنة.
11. ب نعم. حتّى الجذر التربيعي، وهو بطيء، أسرع من اللوغاريتم. وتراه بوضع $t = \sqrt{x}$ فيصير المقدار $\frac{t}{2 \ln t}$.
12. ج نعم. فرق اللوغاريتمين هو لوغاريتم الكسر، وبذلك تتحوّل حالة عدم التعيين إلى نهاية كسر بسيطة.

نهايات مهمة تتعلق بالتابع اللوغاريتمي . المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 147 إلى 149 . basita123.com