



الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

ورقة تمارين: مشتقّ التابع المركّب $\ln \circ u$

التابع اللوغاريتمي . 12 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

1. التابع u اشتقاقياً وموجباً تماماً على I . ما مشتقّ $x \mapsto \ln(u(x))$ ؟

(أ) $\frac{u'(x)}{u(x)}$

(ب) $\frac{1}{u(x)}$

(ج) $\frac{u(x)}{u'(x)}$

2. ما الشرط الذي يشترطه الكتاب على u قبل تطبيق قاعدة اشتقاق $\ln \circ u$ ؟

(أ) أن يكون u موجباً أو معدوماً على I

(ب) أن يكون u موجباً تماماً على I

(ج) أن يكون u' موجباً تماماً على I

3. ما مشتقّ $f(x) = \ln(3x + 5)$ على $]-\frac{5}{3}, +\infty[$ ؟

(أ) $\frac{1}{3x + 5}$

(ب) $\frac{3}{x}$

(ج) $\frac{3}{3x + 5}$

4. ما مشتقّ $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ على $\mathbb{R}$ ؟

(أ) $\frac{1}{x^2 + 1}$

(ب) $\frac{2x}{x^2 + 1}$

(ج) $\frac{2x}{x^2}$

5. ما مشتقّ $f(x) = \ln(x - 2) - \ln(x + 2)$ على $]2, +\infty[$ ؟

(أ) $\frac{4}{x^2 - 4}$

(ب) $\frac{1}{x^2 - 4}$

(ج) $\frac{1}{(x - 2)(x + 2)}$

6. التابع u اشتقاقياً وسالب تماماً على I . ما مشتق $f(x) = \ln(-u(x))$ ؟

(أ) $-\frac{u'(x)}{u(x)}$

(ب) $\frac{-u'(x)}{u(x)}$

(ج) $\frac{u'(x)}{u(x)}$

7. لماذا لا يجوز القول إن $x \mapsto \ln(x^2 - 1)$ اشتقاقياً على $\mathbb{R}$ ؟

(أ) لأن $x^2 - 1$ ليس اشتقاقياً على $\mathbb{R}$

(ب) لأن مشتقه $\frac{2x}{x^2 - 1}$ غير معرف عند $x = 0$

(ج) لأن $x^2 - 1$ ليس موجباً تماماً على $\mathbb{R}$

8. ما مشتق $f(x) = \ln(\cos x)$ على $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ؟

(أ) $-\tan x$

(ب) $\tan x$

(ج) $\frac{1}{\cos x}$

9. ما مشتق $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على $]1, +\infty[$ ؟

(أ) $\frac{x+1}{x-1}$

(ب) $\frac{2}{x^2 - 1}$

(ج) $\frac{2}{(x+1)^2}$

10. ما مشتق $f(x) = \ln(2x)$ على $]0, +\infty[$ ؟

(أ) $\frac{2}{x}$

(ب) $\frac{1}{2x}$

(ج) $\frac{1}{x}$

11. ما مشتق $f(x) = \ln(\sqrt{x})$ على $]0, +\infty[$ ؟

(أ) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

(ب) $\frac{1}{2x}$

(ج) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

12. التابع u اشتقاقياً وموجب تماماً على المجال I . على أي مجموعة يكون $\ln \circ u$ اشتقاقياً؟

(أ) على I كلها

(ب) على I ما عدا أصفار u'

(ج) على $I \cap]0, +\infty[$

سَلَم التصحيح

1. أ نعم: مشتق الداخل على الداخل. وتحقق بالحالة $u(x) = x$ فتعود الصيغة إلى $\frac{1}{x}$.
2. ب نعم، وهو الشرط الذي يطبعه الكتاب بلونٍ مختلف عن بقية السطر. من دونه لا وجود للتابع أصلاً.
3. ج نعم. مشتق الداخل هو 3 ، والمجال المعطى هو بالضبط ما يجعل $3x + 5 > 0$.
4. ب نعم. والداخل موجبٌ تماماً على $\mathbb{R}$ كلها لأن المربع لا يقل عن الصفر، فالشرط محقق من دون استثناء.
5. أ نعم. المشتق هو $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$ ، وبتوحيد المقامين يصير $\frac{(x+2) - (x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{4}{x^2 - 4}$.
6. ج نعم، وهذه هي المفاجأة: الإشارتان السالبتان تحذفان إحداهما الأخرى، فالصيغة لا تتغير عن الحالة الموجبة.
7. ج نعم. الشرط يسقط على المجال $[-1, 1]$ ، فالتابع غير معرّف هناك أصلاً. وهو اشتقائيٌّ على كلّ مجالٍ جزئيٍّ يتجنّبه.
8. أ نعم. مشتق الداخل هو $-\sin x$ ، فالكسر $\frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$. والمجال المعطى هو ما يجعل $\cos x > 0$.
9. ب نعم. وأسرع طريق أن تكتب $f(x) = \ln(x-1) - \ln(x+1)$ أولاً، فيصير المشتق $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$.
10. ج نعم، والنتيجة لافتة: $\frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$ ، أي المشتق نفسه لـ $\ln x$. والسبب أن $\ln(2x) = \ln 2 + \ln x$ ، والفرق بينهما ثابت.
11. ب نعم. وأسهل طريق أن تكتب $f(x) = \frac{1}{2} \ln x$ بقاعدة الدرس الثاني، فيصير المشتق نصف $\frac{1}{x}$.
12. أ نعم. المبرهنة تنقل الاشتقاق من u إلى $\ln \circ u$ على المجال نفسه، ما دام الشرطان محققين عليه.

مشتق التابع المركب $\ln \circ u$. المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 147 إلى 147 . basita123.com