

بسيطة ✨

الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

ورقة تمارين: لوغاريتم جداء ضرب

التابع اللوغاريتمي . 12 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

1. أيّاً يكن $a > 0$ و $b > 0$ ، ما قيمة $\ln(ab)$ ؟

أ) $\ln a \times \ln b$

ب) $\ln(a + b)$

ج) $\ln a + \ln b$

2. أيّاً يكن $a > 0$ و $b > 0$ ، ما قيمة $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$ ؟

أ) $\ln a - \ln b$

ب) $\frac{\ln a}{\ln b}$

ج) $\ln b - \ln a$

3. أيّاً يكن $a > 0$ و $n \in \mathbb{N}^*$ ، ما قيمة $\ln(a^n)$ ؟

أ) $(\ln a)^n$

ب) $n \ln a$

ج) $\ln a + n$

4. أيّاً يكن $a > 0$ ، ما قيمة $\ln \sqrt{a}$ ؟

أ) $\frac{1}{2} \ln a$

ب) $\sqrt{\ln a}$

ج) $2 \ln a$

5. هل تصحّ المساواة $\ln(x^2) = 2 \ln x$ عند كلّ x من $\mathbb{R}^*$ ؟

أ) نعم، لأنّ x^2 موجب دائماً

ب) لا، والصيغة الصحيحة هي $\ln(x^2) = (\ln x)^2$

ج) لا، والصيغة الصحيحة هي $2 \ln |x|$

6. احسب $\ln(x^2)$ عند $x = -4$.

أ) $2 \ln(-4)$

ب) $2 \ln 4$

ج) غير معرّف

7. بسّط كتابة العدد $a = \ln 3 + \ln \frac{1}{3}$.

أ) $a = 2 \ln 3$

ب) $a = 0$

ج) $a = \ln 3 - 3$

8. اكتب $\ln 50$ بدلالة $\ln 2$ و $\ln 5$.

(أ) $\ln 2 \times \ln 25$

(ب) $2 \ln 5 + 2 \ln 2$

(ج) $\ln 2 + 2 \ln 5$

9. قارن بين $x = 2 \ln 3$ و $y = 3 \ln 2$ دون استعمال آلة حاسبة.

(أ) $x > y$

(ب) $x < y$

(ج) $x = y$

10. التابعان $f : x \mapsto \ln(x^2 - 1)$ و $g : x \mapsto \ln(x + 1) + \ln(x - 1)$. هل هما متساويان؟

(أ) نعم، لأن $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

(ب) لا، لأن $D_g =]1, +\infty[$ و $D_f = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$

(ج) لا، لأن $f(x) \neq g(x)$ عند $x = 2$

11. حلّ المعادلة $\ln(x + 11) = \ln(x + 3) + \ln(x + 2)$.

(أ) $\mathcal{S} = \{1\}$

(ب) $\mathcal{S} = \{-5, 1\}$

(ج) $\mathcal{S} = \emptyset$

12. جد قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-2}$.

(أ) $n \leq 4$

(ب) $n \geq 4$

(ج) $n \geq 5$

سَلَم التصحيح

1. ج نعم، وهذه هي الخاصّة الأساسيّة للتابع اللوغاريتمي: الجداء في الداخل يصير مجموعاً في الخارج.
2. أ نعم. تخرج من الخاصّة الأساسيّة لأنّ $a = \frac{a}{b} \cdot b$ ، فالقسمة تنزل درجةً وتصير طرحاً.
3. ب نعم. الأس ينزل معاملاً أمام اللوغاريتم، وهذا يتبع من لوغاريتم جداء n عاملاً متساوية.
4. أ نعم. الجذر التربيعي قوّة نصفية، فينزل معاملاً $\frac{1}{2}$. ويثبتته الكتاب من $\ln b^2 = 2 \ln b$ بوضع $b = \sqrt{a}$.
5. ج نعم، هذا هو الجواب. الطرف الأيسر معرّف عند كلّ $x \neq 0$ ، والأيمن يشترط $x > 0$. والصيغة الجامعة $2 \ln |x|$ تصلح للحالتين.
6. ب نعم، لأنّ $|-4| = 4$. والتحقّق مباشر: $(-4)^2 = 16$ و $\ln 16 = 2 \ln 4$.
7. ب نعم، بطريقتين: إما $\ln \frac{1}{3} = -\ln 3$ ، وإما مباشرةً $\ln \left(3 \times \frac{1}{3}\right) = \ln 1 = 0$.
8. ج نعم، لأنّ $50 = 2 \times 5^2$ ، فيصير الجداء مجموعاً والأس معاملاً.
9. أ نعم. $2 \ln 3 = \ln 9$ و $3 \ln 2 = \ln 8$ ، وبما أنّ $9 > 8$ والتابع متزايدٌ تماماً فإنّ $x > y$.
10. ب نعم، هذا هو الجواب. الصيغتان تتفقان على $[1, +\infty[$ ، لكنّ f معرّف أيضاً على $]-\infty, -1[$ حيث العاملان سالبان معاً.
11. أ نعم. مجموعة التعريف $]-2, +\infty[$ ، والمعادلة تصير $x^2 + 5x + 6 = x^2 + 11x$ أي $x^2 + 4x - 5 = 0$ بجذرين -5 و 1 ، والأوّل خارج المجال.
12. ج نعم. بأخذ اللوغاريتم: $-n \ln 3 \leq -2 \ln 10$ ، وبالقسمة على $-\ln 3$ ينقلب الاتجاه فيصير $n \geq \frac{2 \ln 10}{\ln 3} \approx 4.19$ ، وأصغر عددٍ طبيعيٍّ فوقها هو 5 .