



الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

ورقة تمارين: المتحولات العشوائية الحداثية

الاحتمالات . 12 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

1. نلقي حجر نرد ونهتم فقط بوقوع الحدث «ظهور العدد 6». ما فضاء العينة في هذا الاختبار البرنولي؟

(أ) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، فهذه نتائج النرد(ب) $\{6\}$ ، فهو الحدث المستهدف(ج) $\{S, S'\}$ ، أي وقوع الحدث أو عدم وقوعه

2. كم وسيطاً للقانون الحداثي، وما هي؟

(أ) اثنان، n و p (ب) ثلاثة، n و p و q (ج) اثنان، p و k 3. في تجربة برنولية من خمسة اختبارات باحتمال نجاح $\frac{1}{3}$ ، ما $\mathbb{P}(X = 2)$ ؟(أ) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{243}$ (ب) $\binom{5}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{243}$ (ج) $\binom{5}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}$ 4. نلقي حجر نرد مثاليًا عدّة مرّات، والنجاح هو «ظهور 5 أو 6». ما p ؟(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{1}{6}$ (ج) $\frac{2}{3}$ 5. صندوق فيه كرات حمراء وأخرى غير حمراء. نسحب ثلاث كرات على التوالي دون إعادة، و X عدد الحمراءات. هل يتبع X قانوناً حداثياً؟

(أ) نعم، فالسحبات ثلاث والنجاح محدّد

(ب) لا، لأنّ السحبات دون إعادة ليست مستقلة

(ج) لا، لأنّ السحب متتالي لا متزامن

6. الكتاب يعدّ إلقاء خمس قطع متماثلة في آنٍ معاً مكافئاً لإلقاء قطعة واحدة خمس مرّات. ما وضع هذه الجملة؟

(أ) نتيجة مبرهنة في الدرس

(ب) افتراض يقبله الكتاب صراحةً

(ج) خطأ في الكتاب، فالحالتان مختلفتان

7. متحول يتبع $\mathcal{B}(50, 0.4)$. ما $\mathbb{E}(X)$ ؟

(أ) 0.4

(ب) 20

(ج) 25

8. للمتحوّل نفسه، $\mathcal{B}(50, 0.4)$ ، ما $V(X)$ ؟

أ) 12

ب) 30

ج) 20

9. متحوّل يتبع $\mathcal{B}(7, p)$ حيث $0 < p < 1$. كم قيمةً يمكن أن يأخذ؟

أ) ثمانٍ

ب) سبعٌ

ج) ذلك يتوقّف على p

10. X يتبع $\mathcal{B}(6, p)$ ، والمطلوب $\mathbb{P}(X \geq 2)$. ما أقصر طريق؟

أ) اجمع الحدود من $k = 2$ إلى $k = 6$

ب) احسب $1 - \mathbb{P}(X = 0)$

ج) احسب $1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1)$

11. في تجربة برنوليّة من ثلاث رميات، ما احتمال كلمةٍ بعينها فيها نجاحان وإخفاقٌ واحد، مثل $SS'S$ ؟

أ) $3p^2q$

ب) p^2q

ج) pq^2

12. في مسألةٍ نحسب فيها احتمال نجاحٍ ثلاث مرّاتٍ في عشر محاولات، أيّ عددٍ هو n وأيّهما k ؟

أ) $n = 3$ و $k = 10$

ب) لا يُعرف إلا بمعرفة p

ج) $n = 10$ و $k = 3$

سَلَم التصحيح

1. ج نعم، وهذا هو الجديد في التعريف: الاختبار البرنولي لا يُعرّف بأن يكون للتجربة ناتجان، بل بأن نضيق اهتمامنا إلى حدث واحد. والكتاب يضع كلمة «فقط» بالأزرق وتحتها خط لهذا السبب.
2. أ نعم، ولهذا يُكتب الرمز $B(n, p)$ بوسيطين. و q ليس ثالثاً بل اختصاراً لـ $1 - p$ ، والكتاب يقولها صراحةً في صفحة 170: «إذن $q = 1 - p$ ».
3. ج نعم. $10 \times \frac{1}{9} \times \frac{8}{27} = \frac{80}{243}$. وتحقّق سريع: مجموع الأُسَيْن $2 + 3 = 5 = n$ ، وأُس p يساوي العدد الأسفل في المعامل.
4. أ نعم. النجاح حدثٌ لا نتيجة، ووجهان من ستّة يحقّقانه، ف $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. والكتاب يكتب هذه الخطوة صراحةً في مثاله صفحة 173، لأنّها الموضوع الذي يسقط فيه أكثر الحلول.
5. ب نعم. الكتاب يذكر في أمثله المرجعيّة «السحب المتتالي مع الإعادة»، والإعادة هي الفيصل: بها يعود الصندوق إلى حاله فتبقى السحبات مستقلّة وباحتمال نجاح ثابت. دونها يتغيّر احتمال النجاح في السحبة التالية مشروطاً بما ظهر قبلها، فيسقط شرط الاستقلال.
6. ب نعم، والكتاب يكتب بهذه الصفة: «إذ نقبل أنّه». فأنت تقبل نموذجاً لا تستنتج نتيجة. والاختبار البرنولي في هذه الحالة هو إلقاء قطعة واحدة، و n عدد القطع لا عدد الرميات.
7. ب نعم، $np = 50 \times 0.4 = 20$. ولاحظ بساطة الصيغة: لا مجموع ولا معامل. وهذا ربح القانون الحداثي، إذ لا تحتاج إلى جدول القانون لحسب التوقّع.
8. أ نعم، $np(1 - p) = 20 \times 0.6 = 12$. ولاحظ الرقابة المجانيّة: التباين يساوي التوقّع مضروباً بـ $1 - p$ ، و $1 - p$ لا يتجاوز الواحد، فالتباين لا يتجاوز التوقّع، وهو أصغر منه كلّما كان p موجباً تماماً.
9. أ نعم. مجموعة القيم $\{0, 1, \dots, 7\}$ ، والصفر منها: أن يخفق المرء في كلّ المحاولات حالةٌ ممكنة. ولهذا في حساب المتّمة يكون $\mathbb{P}(X = 0)$ حدّاً حقيقياً لا صفراً.
10. ج نعم، حدّان بدل خمسة. ومتّمة «مزّتين على الأقلّ» هي «صفر أو مرّة واحدة»، والحدثان متنافيان فيُجمعان. والقاعدة العامّة: عُدّ الحدود في الطريقتين قبل أن تمسك القلم.
11. ب نعم، وهو جداء على المسار: نجاحٌ ثمّ إخفاقٌ ثمّ نجاح. ولاحظ أنّ الترتيب لا يغيّر الجداء، ولذلك يكون لـ SSS' و $SS'S$ و $S'SS$ الاحتمال نفسه. هذه هي الملاحظة التي يقوم عليها المعامل.
12. ج نعم. n عدد الاختبارات و k عدد النجاحات، و k لا يتجاوز n أبداً. والكتاب يكتب هذه الزوجيّة تحت كلّ رقم في أمثله، مثل «هنا $n = 5$ و $k = 3$ »، لأنّها موضع خلطٍ متكرّر.