



الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

ورقة تمارين: المتحولات العشوائية

الاحتمالات . 12 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

1. أيّ العبارات يصف X في «المتحول العشوائي X » وصفاً صحيحاً؟

(أ) عدد مجهول نبحث عن قيمته لحل معادلة

(ب) تابع معرف على Ω قيمه أعداد حقيقية(ج) حدث من أحداث التجربة، أي مجموعة جزئية من Ω 2. ماذا يعني الرمز $(X = 3)$ ؟(أ) معادلة يمكن نقل حدودها، فتصير $X - 3 = 0$

(ب) القيمة 3 نفسها، أي عدد لا مجموعة

(ج) حدث، أي مجموعة النتائج التي صورتها وفق X تساوي 33. ليكن $\Omega = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ متساوي الاحتمال، و $X(b_1) = 5$ و $X(b_2) = 2$ و $X(b_3) = 5$ و $X(b_4) = 5$. ما $\mathbb{P}(X = 5)$ ؟(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{3}{4}$ (ج) $\frac{5}{4}$ 4. تجربة لها سبع نتائج، وتأخذ X عليها القيم 0 و 4 و 0 و 9 و 4 و 0 و 4 . كم عموداً في جدول قانون احتمال X ؟

(أ) سبعة، عمود لكل نتيجة

(ب) ثلاثة، بعدد القيم المختلفة

(ج) اثنان، للقيمة الكبرى والصغرى

5. كتب طالب قانون احتمال بثلاث قيم واحتمالات $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{5}$ ، ثم حسب التوقع والتباين. ما الخطأ؟

(أ) مجموع الاحتمالات ليس واحداً، فالقانون ناقص

(ب) لا خطأ، فكل احتمال بين الصفر والواحد

(ج) المقامات مختلفة، وكان يجب توحيدها قبل الجمع

6. صندوق فيه أربع كرات، ولم تذكر المسألة أنّ السحب متساوي الاحتمال ولا أنّ الكرات متماثلة. ما احتمال سحب كرة بعينها؟

(أ) $\frac{1}{4}$ ، لأنّ الكرات أربع(ب) $\frac{1}{2}$ ، لأنّ الكرة إما تُسحب وإما لا

(ج) لا يمكن تعيينه من المعطيات

7. متحول عشوائي قيمه 1 و 3 باحتمالي $\frac{1}{4}$ و $\frac{3}{4}$. ما $V(X)$ ؟

(أ) 7

(ب) $-\frac{11}{2}$

(ج) $\frac{3}{4}$

8. في لعبة النرد التي حسبناها، قيم X هي 2 و 1 و -1 والتوقع $E(X) = -\frac{1}{6}$ ليرة. أيّ العبارات صحيح؟

(أ) إذا تكررت اللعبة مَرَّاتٍ كثيرةً اقترب أمل الربح من $-\frac{1}{6}$

(ب) يخسر اللاعب سُدُسَ ليرة في كلّ لعبة

(ج) اللعبة مستحيلة، لأنّ الاحتمال لا يكون سالباً

9. صندوق فيه خمس كرات: ثلاث سوداء وكرتان بيضاوان. نسحب كرتين في آنٍ معاً، و X عدد الكرات البيضاء المسحوبة. ما

$E(X)$ ؟

(أ) 1

(ب) $\frac{8}{5}$

(ج) $\frac{4}{5}$

10. متحول عشوائي $\sigma(X) = 5$. ما $V(X)$ ؟

(أ) 25

(ب) $\sqrt{5}$

(ج) 5

11. نلقي حجر نردٍ متوازنٍ مرتين متتاليتين، و X مجموع الرقمين الظاهرين. ما $E(X)$ ؟

(أ) 7

(ب) $\frac{7}{2}$

(ج) 6

12. في مسألة الكرات نفسها، $E(X) = \frac{4}{5}$ والقانون $\frac{3}{10}$ و $\frac{6}{10}$ و $\frac{1}{10}$ للقيم 0 و 1 و 2 . ما $\sigma(X)$ ؟

(أ) $\frac{9}{25}$

(ب) $\frac{3}{5}$

(ج) 1

سَلَم التصحيح

1. ب نعم، وهذا مضمون تعريف 3. مدخله ناتج من التجربة ومخرجه عدد، فهو آلة ربط لا مجهول. ولهذا يجوز أن تعطي نتيجتان مختلفتان العدد نفسه، كما في HHT و HTH .
2. ج نعم. في مثال القطع الثلاث $(X = 3) = \{TTT\}$ ، مجموعة فيها عنصر واحد. ومن هنا يأتي الطريق الوحيد للحساب: اكتب المجموعة أولاً، ثم احسب احتمالها.
3. ب نعم. $(X = 5) = \{b_1, b_3, b_4\}$ ، ثلاثة عناصر من أربعة. والخطوة الأولى دائماً كتابة المجموعة، لا تخمين الكسر.
4. ب نعم، $I = \{0, 4, 9\}$. والاحتمالات $\frac{3}{7}$ و $\frac{3}{7}$ و $\frac{1}{7}$ إن كانت النتائج متساوية الاحتمال، ومجموعها واحد. ولاحظ أن كل قيمة ترد في الجدول مرّة واحدة بالضبط.
5. أ نعم، $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}$ ، وينقص $\frac{13}{60}$. إمّا أن قيمة سقطت من الجدول وإمّا أن احتمالاً حُسب خطأً. وهذه أرخص رقابة في الدرس: سطر واحد يمنع بناء كل ما بعده على أساس ناقص.
6. ج نعم. تساوي الاحتمال ليس صفة للأعداد بل شرط في المسألة، ويُعرف من كلمات مثل «متوازن» أو «مثالي» أو «متماثلة» أو «عشوائية». بدونها يبقى القانون الاحتمالي مجهولاً، ولا توقّع ولا تباين.
7. ج نعم. $E(X) = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{5}{2}$ ، ثم $7 - \frac{25}{4} = \frac{3}{4}$. وبالتعريف: $\left(1 - \frac{5}{2}\right)^2 \frac{1}{4} + \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2 \frac{3}{4} = \frac{9}{16} + \frac{3}{16} = \frac{3}{4}$ ، والطريقان متفقان.
8. أ نعم، وهذا ما يقوله الكتاب بالضبط. التوقّع كائن رياضي لا وعد بريح في لعبة، وكلمة «عدداً كبيراً من المرات» هي شرط الجملة لا زينتها.
9. ج نعم. القانون $\frac{3}{10}$ و $\frac{6}{10}$ و $\frac{1}{10}$ من $\binom{3}{2}$ و $\binom{3}{1}\binom{2}{1}$ و $\binom{2}{2}$ على $\binom{5}{2}$ ، ومجموعها واحد. ثم $0 + \frac{6}{10} + \frac{2}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$. وهذه ثاني تمارين الكتاب صفحة 165.
10. أ نعم. من $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ يأتي $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 5$ ، $V(X) = (\sigma(X))^2 = 25$. والاتّجاه يُحفظ بالوحدات: إن كانت القيم ليرات ف σ بالليرات و V بالليرات المربعة. ولا تستنتج من ذلك أن التباين أكبر دائماً: إن كان σ أصغر من واحد كان مربّعه أصغر منه، كما في السؤال الأخير من هذه المجموعة.
11. أ نعم. القيم من 2 إلى 12 على ستّ وثلاثين نتيجة، والقانون متناظر حول 7 لأنّ 2 و 12 لهما الاحتمال نفسه، وكذلك 3 و 11، وهكذا. فالتوقّع هو مركز التناظر.
12. ب نعم. بالخاصة $\sum x_i^2 p_i' = 0 + \frac{6}{10} + \frac{4}{10} = 1$ ، ثم $V(X) = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$ ، ثم $\sigma(X) = \frac{3}{5}$. ولاحظ المعقولة: 0.6 مقابل قيم تتراوح بين 0 و 2.