



الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

ورقة تمارين: الاستقلال الاحتمالي لمتحولين عشوائيين

الاحتمالات . 12 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

1. ما الشرط الذي يجعل الحديث عن قانون الزوج (X, Y) ممكناً أصلاً؟

(أ) أن يكون لـ X و Y العدد نفسه من القيم

(ب) أن يكون المتحولان معرفين على فضاء العينة ذاته

(ج) أن يكون المتحولان مستقلين احتمالياً

2. في مثال الصندوق، لماذا يكون المقام تسعة في كل خانة؟

(أ) لأن الجدول فيه تسع خانات

(ب) لأن السحب مع الإعادة، فكل سحبٍ ثلاثة خيارات

(ج) لأن مجموع أرقام الكرات الثلاث تسعة

3. لماذا $p_{1,4} = \frac{2}{9}$ بينما $p_{2,4} = \frac{1}{9}$ ، مع أن المجموع 4 في الحالتين؟

(أ) لأن الكرة الزرقاء أكثر من الحمراء في الصندوق

(ب) لأن 4 عدد زوجي

(ج) لأن الأولى تتحقق بنتيجتين والثانية بنتيجة واحدة

4. لماذا $I = \{0, 1, 2\}$ بينما $J = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ؟

(أ) لأن Y معرف على فضاءٍ أوسع

(ب) لأن Y يعد أيضاً، لكنه يعد الكرات الحمراء

(ج) لأن X يعد الكرات الزرقاء و Y يجمع الأرقام

5. في جدول الزوج، ماذا يعطيك جمع خانات سطرٍ كامل؟

(أ) $\mathbb{P}(Y = y_j)$ ، أي هامش Y

(ب) $\mathbb{P}(X = x_i)$ ، أي هامش X

(ج) جداء p_i في p'_j

6. أعطيت هامشي X و Y فقط. هل يمكنك كتابة جدول الزوج؟

(أ) لا، إلا إذا علم أن المتحولين مستقلان احتمالياً

(ب) نعم دائماً، بضرب كل هامشٍ بالآخرى

(ج) لا أبداً، فالهامشان لا يكفيان في أي حال

7. نريد إثبات الاستقلال بفحص الشرط خانة خانة في جدولٍ لزوجٍ فيه ثلاثة أسطرٍ وخمسة أعمدة. كم مساواةً نفحص؟

(أ) واحدة تكفي، فالمساواة إما تصح وإما لا

(ب) ثمان، بعدد الهوامش

(ج) خمس عشرة، بعدد الخانات

8. في جدولٍ لزوجٍ وجدتْ خانةٌ قيمتها 0 وهامشها $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$. ماذا تستنتج؟

- (أ) أنّ المتحوّلين ليسا مستقلّين، وانتهى الفحص
(ب) أنّ الخانة ناقصةٌ ويجب حسابها من الهامشين
(ج) لا شيء بعد، فيلزم فحص الخانات كلّها

9. يكتب الكتاب صفحة 168 في مثاله: $p_0 \times p_2 = \frac{1}{81}$. بحساب الهوامش $p_0 = \frac{1}{9}$ و $p_2 = \frac{4}{9}$ و $p'_2 = \frac{1}{9}$.
ما الحكم؟

- (أ) الجداء المكتوب صحيح، و $p_2 = \frac{1}{9}$
(ب) الجداء خطأ كلّّه، والصواب $\frac{4}{81}$
(ج) سقطت شرطةٌ في الطبع، والمقصود $p_0 \times p'_2$

10. جدولٌ لزوجٍ: السطر $X = 0$ فيه $\frac{1}{20}$ و $\frac{1}{8}$ و $\frac{1}{8}$. ما $\mathbb{P}(X = 0)$ ؟

- (أ) $\frac{3}{10}$
(ب) $\frac{1}{20}$
(ج) $\frac{1}{1280}$

11. زوجٌ مستقلٌّ احتماليّاً، ومعلومٌ أنّ $p_1 = 0.2$ و $p_{1,2} = 0.04$. ما p'_2 ؟

- (أ) 0.2
(ب) 0.008
(ج) 0.16

12. في جدولٍ مثال الصندوق، ما مجموع الخانات الخمس عشرة كلّها؟

- (أ) $\frac{15}{9}$
(ب) 1
(ج) 2 ، واحدٌ لكلّ متحوّل

سَلَم التصحيح

1. ب نعم، وتعريف 6 يكتبه صراحةً: «على فضاء العيّنة ذاته Ω ». والمعنى العملي: السحبة الواحدة تعيّن القيمتين معاً. لو جاء X من تجربة Y من أخرى لما كان للحدث $(X = x_i) \cap (Y = y_j)$ معنى.
2. ب نعم، $3 \times 3 = 9$ نتيجةً مرتّبة. ولولا الإعادة لبقى خياران في السحبة الثانية فكانت النتائج ستاً، ولتغيّر الجدول كلّهُ. فالمقام يخبرك أيّ افتراضٍ تستعمل.
3. ج نعم. $X = 1$ و $Y = 4$ يعني الكرتين 1 و 3، وهما تأتيان بترتيبين لأنّ السحب على التتالي: (1, 3) و (3, 1). أمّا $X = 2$ و $Y = 4$ فيعني $2 + 2$ ، أي الكرة نفسها مرّتين، ولها ترتيبٌ واحد.
4. ج نعم. عدّد الزرقاوات في سحبتين هو 0 أو 1 أو 2، أمّا مجموع رقمين من $\{1, 2, 3\}$ فيتراوح بين $1 + 1 = 2$ و $3 + 3 = 6$. المتحوّلان على الفضاء نفسه ومجموعتا قيمهما مختلفتان تماماً.
5. ب نعم، والسبب ليس اصطلاحاً: قيم Y تجزئ Ω إلى أحداثٍ منفصلةٍ مثنى مثنى، فتنطبق مبرهنة 1 من الدرس الأوّل، واحتمال الحدث يساوي مجموع احتمالات قطعه. وكلّ قطعةٍ خانةٌ من السطر.
6. أ نعم. الطريق من الجدول إلى الهامشين مفتوحٌ دائماً بالجمع، والطريق العكسيّ مسدودٌ إلا عند الاستقلال. والسبب واضح: الهامشان يقولان كم مرّة تقع كلّ قيمةٍ على حدة، ولا يقولان أيّ قيمتين تقعان معاً.
7. ج نعم، $3 \times 5 = 15$. وهذا للإثبات فقط. أمّا النفي فيكلّف مقارنةً واحدةً ناجحة: خانةٌ تخالف تنهي الفحص فوراً. فالإثبات والنفي غير متناظرين في عدد المقارنات، مع أنّ الشرط نفسه متناظرٌ في المتحوّلين، وهذا موضع الغلط الأشهر في الدرس.
8. أ نعم. الجداء $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$ وهو موجبٌ تماماً، والخانة صفر، فالمساواة تخيب عند هذا الزوج. وخانةٌ واحدةٌ مخالفةٌ تكفي للنفي، فلا داعي لبقية الجدول. وابحث عن الأصفار أولاً، فهي أسرع طريقاً إلى الجواب.
9. ج نعم. $\frac{1}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{81}$ ، وهو العدد المكتوب. ولو أخذنا المطبوع حرفياً لكان $\frac{4}{81} = \frac{1}{9} \times \frac{4}{9}$ ، وهو ليس ما يكتبه الكتاب نفسه. فالحساب يكشف الشرطة الساقطة، والنتيجة النهائية تبقى صحيحة.
10. أ نعم. $\frac{3}{10} = \frac{6}{20} = \frac{5}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{20}$. وهذه أولى تمارين الكتاب صفحة 168، والسطر الثاني يكمل إلى $\frac{7}{10}$ فيصير المجموع واحداً.
11. أ نعم. الاستقلال يعطي $p_{1,2} = p_1 \times p'_2$ ، فالمجهول واحدٌ والقسمة تحلّه: $0.04 \div 0.2 = 0.2$. وهنا تُستعمل المساواة أداةً لا فحصاً، وهذا هو تمرين الكتاب الثاني صفحة 168.
12. ب نعم، ودائماً. الخانات تقسّم Ω كلّهُ، فمجموعها احتمال الحدث الأكيد. والكتاب يطبع هذا الواحد في زاوية الجدول بلون الجدول لا بالأسود، لأنّه يقرأ من ثلاث جهات: مجموع الخانات، ومجموع هامش X ، ومجموع هامش Y . وهو أرخص تحقّقٍ عندك.