



الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

ورقة تمارين: الاحتمالات المشروطة

الاحتمالات . 12 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

1. في شجرة المدرسة، العدد 0.7 مكتوب على الفرع الذي يخرج من G ويصل إلى E . ماذا يعني؟(أ) $\mathbb{P}(E)$ ، أي نسبة المقيمين عند أسرهم في المدرسة كلها(ب) $\mathbb{P}(G \cap E)$ ، أي نسبة الإناث المقيمت عند أسرهن في المدرسة كلها(ج) $\mathbb{P}(E | G)$ ، أي نسبة المقيمت عند أسرهن بين الإناث2. متى يكون التعبير $\mathbb{P}(A | B)$ غير معرف أصلاً؟(أ) حين يكون $\mathbb{P}(A) = 0$ (ب) حين يكون $A \cap B = \emptyset$ (ج) حين يكون $\mathbb{P}(B) = 0$

3. صندوق فيه ثلاث كرات بيضاء وكرتان سوداوان. نسحب كرتين دون إعادة. ما احتمال أن تكون الأولى بيضاء والثانية سوداء؟

(أ) $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$ (ب) $\frac{3}{5} + \frac{2}{4} = \frac{11}{10}$ (ج) $\frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$

4. في شجرة بمرحلتين، المرحلة الأولى فيها ثلاثة فروع ومن كل عقدةٍ منها يخرج فرعان. ما مجموع الأعداد الستة المكتوبة على فروع المرحلة الثانية؟

(أ) 1

(ب) 3

(ج) 2 ، لأن من كل عقدةٍ يخرج فرعان

5. في معملٍ ورشتان A و B . من طلبٍ قدره 2000 مصباح صنعت A منها 1200 وصنعت B البقية. ونسبة4% من مصابيح A معطوبة و 3% من مصابيح B . وليكن D حدث «المصباح معطوب». ما $\mathbb{P}(D)$ لمصباحٍ مسحوبٍ عشوائياً؟

(أ) 0.07

(ب) 0.036

(ج) 0.035

6. حدثان A و B في تجربةٍ واحدة، $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$ و $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$ و $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{12}$. ماذا تستنتج؟

(أ) أنّهما منفصلان

(ب) أنّهما مستقلّان احتمالياً

(ج) أنّهما منفصلان ومستقلّان معاً

- 7.** في مثال الصندوقين، حسبنا $\mathbb{P}(B | U_1) = \frac{1}{3}$ و $\mathbb{P}(U_1 | B) = \frac{5}{11}$. أيّ العبارتين يصف الفرق بينهما؟
 (أ) الأول يسأل عن لون الكرة والصندوق معلوم، والثاني يسأل عن الصندوق واللون معلوم
 (ب) هما العدد نفسه، والفرق في ترتيب الكتابة فقط
 (ج) الأول مشروط والثاني غير مشروط

- 8.** في مسألة المعمل نفسها، سُحب مصباحٌ فُؤُجد معطوباً. ما احتمال أن يكون من الورشة A ؟

(أ) 0.04

(ب) $\frac{2}{3}$

(ج) 0.6

- 9.** إذا كان $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$ و $\mathbb{P}(B | A) = \frac{1}{4}$ و $\mathbb{P}(B | A') = \frac{4}{5}$ ، فما $\mathbb{P}(B)$ ؟

(أ) $\frac{37}{60}$

(ب) $\frac{1}{12}$

(ج) $\frac{21}{20}$

- 10.** إذا كان $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$ و $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$ و $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{2}{3}$ ، فما $\mathbb{P}(B | A)$ ؟

(أ) $\frac{4}{3}$

(ب) $\frac{1}{6}$

(ج) $\frac{1}{3}$

- 11.** في مدرسةٍ يمارس 30% من الطلاب كرة المضرب، والذكور 60% من المدرسة، و 55% من الذكور لا يمارسونها. ما احتمال ألا تمارسها طالبةٌ مختارةٌ عشوائياً من بين الطالبات؟

(أ) 0.7

(ب) 0.45

(ج) 0.925

- 12.** ثلاثة صناديق: الأول فيه حروف كلمة SAVE، والثاني حروف OUR، والثالث حروف SOULS. نسحب من كلٍّ حرفاً، والسحبات مستقلة. ما احتمال الحصول على SOS؟

(أ) $\frac{1}{30}$

(ب) $\frac{1}{60}$

(ج) $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{59}{60}$

سَلَم التصحيح

1. ج نعم. كل عدد على فرع في المرحلة الثانية مشروط بالعقدة التي خرج منها. والاختبار الذي يفصل: انظر إلى العقدة الأخرى، فعلى فرعها المقابل 0.4 لا 0.7 . ولو كان العددين غير مشروطين لوجب أن يتساويا، فكلاهما سيكون $\mathbb{P}(E)$ نفسه. اختلافهما هو الدليل على أن لكل منهما مرجعاً آخر.

2. ج نعم، وبهذا يبدأ تعريف 1 في الكتاب: «ليكن B حدثاً يُحقق $\mathbb{P}(B) \neq 0$ ». والمعنى قبل الصيغة: لا يُشترط بحدثٍ مستحيلٍ أصلاً، فلا معنى لأن تقول «علماً أنه وقع» عن شيء لا يقع.

3. أ نعم. مسار واحد من الجذر، فالضرب. والعدد الثاني $\frac{2}{4}$ لا $\frac{2}{5}$ ، لأن كرة بيضاء خرجت ولم تُعد، فبقيت أربع كرات فيها السوداوان.

4. ب نعم. ثلاث عُقَد في المرحلة الثانية، وعند كل واحدة يجمع فرعاها إلى واحد، فالمجموع ثلاثة. وهذا بعينه ما تراه في شجرة الكرات: تسعة فروع من ثلاث عُقَد، ومجموعها ثلاثة.

5. ب نعم، وهذه مبرهنة 2 بعينها. $\mathbb{P}(A) = \frac{1200}{2000} = 0.6$ و $\mathbb{P}(B) = 0.4$ ، ثم $0.6 \times 0.04 + 0.4 \times 0.03 = 0.024 + 0.012 = 0.036$. والجواب أقرب إلى 0.04 منه إلى 0.03 ، لأن الورشة A أكبر.

6. ب نعم. $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ ، وهو بالضبط $\mathbb{P}(A \cap B)$ ، فتعريف 2 متحقق. وبالقراءة الأخرى: $\mathbb{P}(B | A) = \frac{1/12}{1/3} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(B)$ ، أي إن معرفة A لم تغيّر شيئاً.

7. أ نعم، وهذا هو كل الفرق. المشروط به هو ما تعرفه، لا ما وقع أولاً في الزمن. ولهذا كان الثاني أصعب: يمشي عكس اتجاه الشجرة، ويُحسب بمسار واحد مقسوماً على مجموع المسارات.

8. ب نعم. مسار واحد على مجموع المسارات: $\frac{0.6 \times 0.04}{0.036} = \frac{0.024}{0.036} = \frac{2}{3}$. ولاحظ أنه أكبر من $\mathbb{P}(A) = 0.6$ ، وهذا معقول: العطب خبز يربح الورشة الأكثر عطباً والأكثر إنتاجاً.

9. أ نعم. الحدثان A و A' تجزئة لـ Ω ، فمبرهنة 2 تنطبق: $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{12} + \frac{8}{15} = \frac{5}{60} + \frac{32}{60} = \frac{37}{60}$. ولا تنس أن $\mathbb{P}(A') = 1 - \frac{1}{3}$.

10. ج نعم. أولاً $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$ ، ثم $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{3}$ ، ولاحظ الطرح: الاجتماع لا يساوي مجموع الاحتمالين إلا عند الانفصال. ولاحظ أيضاً أن الجواب يساوي $\mathbb{P}(B)$ ، فالحدثان مستقلان.

11. ج نعم. امش على التجزئة بحسب الجنس: عدم الممارسة عند الذكور يعطي $0.6 \times 0.55 = 0.33$ ، وعدم الممارسة كلّ 0.7 ، فحصة الإناث منه $0.7 - 0.33 = 0.37$. ومرجع المقارنة هو الإناث، أي 0.4 ، فالجواب $\frac{0.37}{0.4} = 0.925$.

12. أ نعم. $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{30}$. وانتبه إلى العامل الأخير: في SOULS خمسة حروف وفيها S مرتين، فالبسط اثنان. المقام عدد الأوراق والبسط عدد الأوراق المواتية.