بسيطة

الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

ورقة تمارين: الارتباط الخطّي لثلاثة أشعّة

الأشعّة في الفراغ . 12 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

1. ماذا تعني عبارة «مرتبطة خطّياً» حين تُقال عن ثلاثة أشعّة؟

أ) أنّ كلّ اثنين منها مرتبطان خطّياً

ب) أنّها تقع في مستوٍ واحد

ج) أنّها تقع على منحىً واحد

2. في مبرهنة 3، لماذا اشتُرط ألّا تقع A و B و C على استقامة واحدة؟

أ) لأنّ (ABC) لا يكون مستوياً عندئذ، وتنكمش المجموعة إلى استقامة

ب) لأنّ الحساب يصير أطول

ج) لأنّ المجموعة تصير فارغة

3. في تعريف 2، هل النقطة O نقطةٌ بعينها يجب إيجادها؟

أ) نعم، وإن أخطأت في اختيارها فشل البرهان

ب) لا، فإن صحّت الخاصّة عند نقطةٍ صحّت عند كلّ نقطة

ج) لا، ويجب أن تكون O خارج المستوي

4. متى تُطبَّق مبرهنة 4، أي الصيغة $w = au + bv$ ؟

أ) فقط إذا كان الأشعّة الثلاثة غير صفريّة

ب) دائماً، فهي تكافؤ التعريف

ج) فقط إذا كان u و v غير مرتبطين خطّياً

5. شعاعان من الثلاثة مرتبطان خطّياً وكلاهما غير صفريّ. ماذا نستنتج عن الثلاثة؟

أ) أنّها مرتبطة خطّياً مهما كان الشعاع الثالث

ب) لا شيء، إذ لا تنطبق مبرهنة 4

ج) أنّها غير مرتبطة خطّياً

6. في المثال المحلول، لماذا اختير $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{BG}$ شعاعين مرجعيّين؟

أ) لأنّ $\overrightarrow{IJ}$ يساويهما

ب) لأنّهما الأقصر في الشكل

ج) لأنّهما متعامدان، فهما بالتأكيد غير مرتبطين خطّياً

7. I منتصف $[BE]$. ما مجموع $\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IB}$ ؟

أ) $2\overrightarrow{IE}$

ب) 0

ج) $\overrightarrow{BE}$

8. في المكعّب $ABCDEFGH$ ، I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[FG]$. أتنتمي J إلى المستوي (ABI) ؟

أ) لا، لأنّ (ABI) هو مستوي الوجه $ABFE$ ، و J خارجه

ب) لا يمكن الحكم من دون حساب

ج) نعم، لأنّ الثلاثة على الوجه العلويّ

9. $ABCD$ رباعي وجوه و M تحقّق $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$. بم يساوي $\overrightarrow{AM}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ ؟

أ) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

ب) $\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

ج) $\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

10. $ABCD$ رباعي وجوه، و M تحقّق $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. لماذا تنتمي M إلى المستوي (ABC) ؟

أ) لأنّ المعاملين $\frac{3}{2}$ و 1 موجبان

ب) لأنّ $\overrightarrow{AM}$ كُتب بشعاعين من ذلك المستوي، وهذا نصّ مبرهنة 3

ج) لأنّ M نقطة من رباعي الوجوه

11. في المكعّب $ABCDEFGH$ ، M تحقّق $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$ و N تحقّق $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. بم يساوي $\overrightarrow{MN}$ ؟

أ) $\overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$

ب) $\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$

ج) $\overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$

12. لمستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{P}'$ شعاعا توجيه لكلٍّ منهما، أي أربعة أشعّة. أيّ ثلاثيّةٍ منها تُثبت توازي المستويين؟

أ) شعاعا التوجيه من الأوّل مع شعاعٍ واحد من الثاني، مرّتين

ب) ثلاثة أشعّة كلّها من المستوي الأوّل

ج) شعاع من الأوّل وشعاعان من الثاني، بلا شرط

سلّم التصحيح

1. ب نعم، هذا نصّ تعريف 2. ولاحظ أنّ العبارة نفسها عند شعاعين تعني الوقوع على منحىً واحد. الكلمة واحدة والهندسة مختلفة.

2. أ نعم. بثلاث نقاط على استقامة واحدة يصير $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطّياً، فكلّ ما تصله منهما استقامة لا مستوٍ.

3. ب نعم. التعريف يطلب وجود نقطةٍ ما، والنصّ يضيف أنّ الخاصّة تنسحب على كلّ نقاط الفراغ. عملياً يُختار رأسٌ من رؤوس الشكل.

4. ج نعم. ولو كانا مرتبطين خطّياً لصارت التكافؤ خاطئة: يمكن أن ترتبط الأشعّة الثلاثة خطّياً بحكم الملاحظة من دون وجود a و b .

5. أ نعم، وهذا نصّ الملاحظة. النقاط O و A و B على استقامة واحدة، ويوجد مستوٍ يحوي تلك الاستقامة والنقطة C .

6. ج نعم، وهذا هو تبرير الكتاب حرفيّاً. التعامد ليس شرط المبرهنة، لكنّه يضمن الاستقلال بيقين ومن دون حساب.

7. ب نعم. المنتصف يجعل الشعاعين الخارجين منه إلى الطرفين متقابلين، فمجموعهما معدوم. هذه هي الخاصّة التي تجعل جمع السلسلتين ينفع.

8. أ نعم. النقاط A و B و I كلّها على الوجه $ABFE$ ، و J منتصف حرفٍ في الوجه العلويّ خارج ذلك المستوي.

9. ج نعم. بعلاقة شال $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$ ، فيسقط $\overrightarrow{AD}$ ، ويبقى $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. ثمّ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

10. ب نعم. $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ شعاعا توجيه للمستوي (ABC) ، وكلّ نقطة M تحقّق $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{BC}$ تقع فيه.

11. ج نعم. بسلسلة شال $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AN}$ ، و $\overrightarrow{ME} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$ ، ومجموع ما تبقّى هو $\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$.

12. أ نعم. تُثبت أنّ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{A'B'}$ مرتبطة خطّياً، ثمّ الشيء نفسه مع $\overrightarrow{A'C'}$. عندئذ يقع شعاعا توجيه الثاني في مستوي الأوّل.

الارتباط الخطّي لثلاثة أشعّة . المصدر: الرياضيات، الجزء الثاني، الصفحات 10 إلى 13 . basita123.com