

☆ بسيطة

الفيزياء، البكالوريا، الفرع العلمي

توابع حركة النّوَّاس المرن والطاقة

المطال والسرعة والتسارع بدلالة الزمن، والطاقة الكامنة والحركية

الحركة والتحرك . الوحدة 1 . الدرس 1 (2 من 2)

في الجزء الأول من هذا الدرس وصلنا إلى الشكل العام لمطال النّوَّاس المرن، وفيه ثلاثة ثوابت للحركة. نتابع الآن مع الكتاب في الصفحات 8 إلى 12: كيف يتغير المطال والسرعة والتسارع مع الزمن، وأين يكون كلٌّ منها أعظمياً وأين ينعدم، ثمّ كيف تتحوّل الطاقة بين كامنة وحركية ويبقى مجموعهما ثابتاً. استنتاج تابع السرعة وتابع التسارع والطاقة الميكانيكية طلب في امتحانات البكالوريا.

تابع المطال

الشكل العام للتابع الزمني للمطال هو الذي وصلنا إليه في الجزء الأول من الدرس:

$$\bar{x} = X_{\max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

ويسأل الكتاب: ما شكل هذا التابع بفرض أنّ الجسم كان في مطاله الأعظمي الموجب $\bar{x} = +X_{\max}$ في اللحظة $t = 0$ ؟ نعوض في الشكل العام: $X_{\max} = X_{\max} \cos(0 + \bar{\varphi})$ ، ف $\cos \bar{\varphi} = 1$ ، أي $\bar{\varphi} = 0 \text{ rad}$.

الشكل المختزل

$\bar{x} = X_{\max} \cos \omega_0 t$ حين يبدأ الجسم من مطاله الأعظمي الموجب، أي $\bar{\varphi} = 0$ ، يأخذ التابع شكلاً مختزلاً.

$$\bar{x} = X_{\max} \cos \frac{2\pi}{T_0} t \quad \text{بالتعويض} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

الكتاب، الصفحة 9

ثمّ يطلب الكتاب أن نكمل جدول المطال في خمس لحظاتٍ خلال دورٍ واحد. بالتعويض في الشكل المختزل:

t	$\bar{x}$
0	$+X_{\max}$
$\frac{T_0}{4}$	0
$\frac{T_0}{2}$	$-X_{\max}$

t	$\bar{x}$
$\frac{3T_0}{4}$	0
T_0	$+X_{\max}$

أستنتج

$\bar{x} = \pm X_{\max}$ المطال أعظمي (طويلة) في الموضعين الطرفيين.

$\bar{x} = 0$ المطال معدوم في مركز الاهتزاز.

الكتاب، الصفحة 9

بدأ الجسم من مطاله الأعظمي الموجب في اللحظة $t = 0$. ما مطاله في اللحظة $t = \frac{3T_0}{2}$ ؟

كيف أبدأ؟ اكتب $\frac{3T_0}{2}$ على صورة دورٍ كاملٍ وجزءٍ من دور. بعد الدور الكامل يعود الجسم إلى حيث بدأ.

(أ) $\bar{x} = +X_{\max}$

(ب) $\bar{x} = 0$

(ج) $\bar{x} = -X_{\max}$

ج. نعم: $\bar{x} = X_{\max} \cos \left(\frac{2\pi}{T_0} \times \frac{3T_0}{2} \right)$ ، أي $\bar{x} = X_{\max} \cos 3\pi = -X_{\max}$.

تابع السرعة

تذكّر: «إنّ تابع السرعة هو المشتقّ الأوّل لتابع المطال بالنسبة للزمن.» الكتاب، الصفحة 9.

من امتحان الدورة الثانية 2017: انطلاقاً من التابع الزمنيّ للمطال في النّوَّاس المرن $\bar{x} = X_{\max} \cos \omega_0 t$ ، استنتج التابع الزمنيّ لسرعة الجسم المعلق بالنابض، ثمّ حدّد باستخدام العلاقات المناسبة الأوضاع التي تكون فيها سرعة الجسم عظمى (طويلة)، والأوضاع التي تكون فيها معدومة.

$$\bar{v} = (\bar{x})'_t$$

1. المشتقّ الأوّل نشتقّ تابع المطال بالنسبة للزمن:

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{\max} \sin \omega_0 t$$

2. السرعة العظمى تكون طويلاً السرعة أعظمية حين $\sin \omega_0 t = \pm 1$. عندئذٍ $\cos \omega_0 t = 0$ ، فالمطال معدوم، أي لحظة مرور الجسم في مركز الاهتزاز:

$$v_{\max} = \omega_0 X_{\max}$$

3. السرعة المعدومة وتنعدم السرعة حين $\sin \omega_0 t = 0$. عندئذٍ $\cos \omega_0 t = \pm 1$ ، أي في الموضعين الطرفيين:

$$\bar{x} = \pm X_{\max}$$

حيث يكون المطال أعظمياً تنعدم السرعة، وحيث ينعدم المطال تكون السرعة أعظمية.

$$v_{\max} = \omega_0 X_{\max}$$

وجداول السرعة في اللحظات الخمس نفسها، كما يطلبه الكتاب:

t	$\bar{v}$
0	0
$\frac{T_0}{4}$	$-\omega_0 X_{\max}$
$\frac{T_0}{2}$	0
$\frac{3T_0}{4}$	$+\omega_0 X_{\max}$
T_0	0

أستنتج

$v_{\max} = \omega_0 X_{\max}$ السرعة أعظمية (طويلة) لحظة المرور في مركز الاهتزاز.
 $v = 0$ السرعة معدومة لحظة الوجود في المطالين الأعظميين (الموضعين الطرفيين).

الكتاب، الصفحة 10

انتبه: ✨ فرّق بين طويلاً السرعة وقيمتها الجبرية. $v_{\max} = \omega_0 X_{\max}$ طويلاً موجبة، أمّا $\bar{v}$ فتحمل إشارة جهة الحركة: في اللحظة $\frac{T_0}{4}$ يمرّ الجسم بمركز الاهتزاز بأعظم سرعة، و $\bar{v} = -\omega_0 X_{\max}$ لآته يتحرّك بعكس جهة المحور.

بدأ الجسم من مطاله الأعظمي الموجب في اللحظة $t = 0$. ما قيمة سرعته وجهة حركته في اللحظة $t = \frac{5T_0}{4}$ ؟

كيف أبدأ؟ $\frac{5T_0}{4}$ دور كامل وربع دور. انظر في جدول السرعة إلى السطر الذي يناسب ربع الدور.

(أ) $\bar{v} = -\omega_0 X_{\max}$ ، والجسم يمرّ بمركز الاهتزاز بعكس جهة المحور.

(ب) $\bar{v} = +\omega_0 X_{\max}$ ، والجسم يمرّ بمركز الاهتزاز بجهة المحور.

(ج) $\bar{v} = 0$ ، والجسم في أحد الموضعين الطرفيين.

أ. نعم: $\frac{2\pi}{T_0} \times \frac{5T_0}{4} = \frac{5\pi}{2}$ ، ف $\bar{v} = -\omega_0 X_{\max} \sin \frac{5\pi}{2}$ ، أي $\bar{v} = -\omega_0 X_{\max}$. الإشارة السالبة تعني أنّ الحركة بعكس جهة المحور.

تابع التسارع

تذكّر: «إنّ تابع التسارع هو المشتقّ الأوّل لتابع السرعة بالنسبة للزمن، وهو المشتقّ الثاني لتابع المطال بالنسبة للزمن.» الكتاب، الصفحة 10.

من امتحان الدورة الثانية 2018: انطلاقاً من التابع الزمنيّ للمطال في النّوَّاس المرن $\bar{x} = X_{\max} \cos \omega_0 t$ ، استنتج تابع تسارع الجسم بدلالة مطال الحركة $\bar{x}$ ، ثمّ حدّد باستخدام العلاقات المناسبة الأوضاع التي يكون فيها التسارع أعظمياً (طويلة)، والأوضاع التي يكون فيها معدوماً.

$$\bar{a} = (\bar{v})'_t = (\bar{x})''_t$$

1. المشتقّ الأوّل السرعة أولاً، كما في الفقرة السابقة:

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{\max} \sin \omega_0 t$$

2. المشتقّ الثاني ثمّ نشتقّ السرعة بالنسبة للزمن:

$$\bar{a} = -\omega_0^2 X_{\max} \cos \omega_0 t$$

3. بدلالة المطال لكنّ $\bar{x} = X_{\max} \cos \omega_0 t$ ، فنعوّض. على هذه المعادلة وحدها ثماني درجاتٍ في سلّم تصحيح 2018، أكثر من أيّ خطوةٍ أخرى في السؤال:

$$\bar{a} = -\omega_0^2 \bar{x}$$

4. التسارع الأعظمي تكون طويلة التسارع أعظمية حين $\bar{x} = \pm X_{\max}$ ، أي في الموضعين الطرفيين:

$$a_{\max} = \omega_0^2 X_{\max}$$

5. التسارع المعدوم وينعدم التسارع حين ينعدم المطال، أي عند المرور في مركز الاهتزاز:

$$\bar{x} = 0 \implies \bar{a} = 0$$

التسارع يتناسب طردياً مع المطال ويعاكسه بالإشارة، مثل قوة الإرجاع تماماً، لأن $\bar{F} = m \bar{a} = -k \bar{x}$.

$$\bar{a} = -\omega_0^2 \bar{x}$$

t	$\bar{a}$
0	$-\omega_0^2 X_{\max}$
$\frac{T_0}{4}$	0
$\frac{T_0}{2}$	$+\omega_0^2 X_{\max}$
$\frac{3T_0}{4}$	0
T_0	$-\omega_0^2 X_{\max}$

ويسأل الكتاب: «أثبتت قيمة التسارع أم متغيرة أثناء حركة الجسم؟»

أستنتج

$a_{\max} = \omega_0^2 X_{\max}$ التسارع أعظمي (طويلة) لحظة الوجود في المطالين الأعظميين (الموضعين الطرفيين).

$a = 0$ التسارع معدوم عند المرور في مركز الاهتزاز.

$\bar{a} = -\omega_0^2 \bar{x}$ التسارع غير ثابت، تتغير قيمته بتغير قيمة المطال.

الكتاب، الصفحة 10

انتبه: التسارع في هذه الحركة غير ثابت: معدوم في مركز الاهتزاز، وأعظمي في الموضعين الطرفيين. لذلك لا يصح أن نحسب سرعة الجسم أو موضعه بعلاقات تفترض تسارعاً ثابتاً.

بدأ الجسم من مطاله الأعظمي الموجب في اللحظة $t = 0$. ما قيمة تسارعه في اللحظة $t = \frac{5T_0}{2}$ ؟

كيف أبدأ؟ ابحث أولاً عن موضع الجسم في هذه اللحظة، ثم استعمل $\bar{a} = -\omega_0^2 \bar{x}$.

(أ) $\bar{a} = -\omega_0^2 X_{\max}$

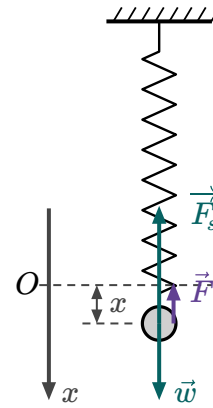
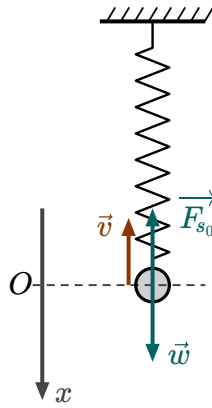
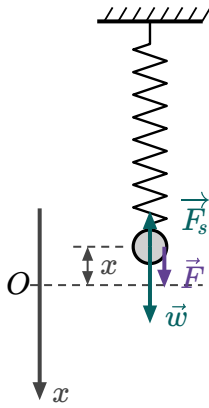
(ب) $\bar{a} = +\omega_0^2 X_{\max}$

(ج) $\bar{a} = 0$

ب. نعم: بعد دورين ونصف يكون الجسم في $\bar{x} = -X_{\max}$ ، ف $\bar{a} = -\omega_0^2 \times (-X_{\max})$ ، أي $\bar{a} = +\omega_0^2 X_{\max}$ ، نحو مركز الاهتزاز.

المطال والسرعة والتسارع معاً

يرسم الكتاب منحنياً لكلّ تابع. ضعها الآن فوق بعضها: في كلّ لحظةٍ من اللحظات الخمس تقرأ المطال والسرعة والتسارع معاً، وترى الجسم على النابض في موضعه، المحور شاقوليّ موجّه نحو الأسفل كما في الكتاب، فالسرعة السالبة صعود.



1. $t = 0$: الجسم في مطاله الأعظمي

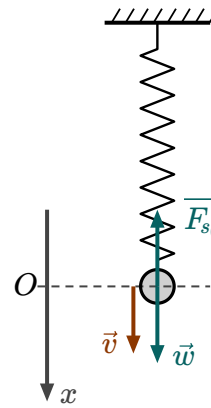
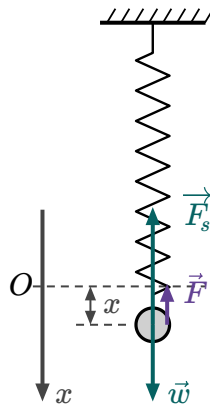
الموجب $\bar{x} = +X_{\max}$: السرعة معدومة،
والتسارع $\bar{a} = -\omega_0^2 X_{\max}$ نحو
مركز الاهتزاز.

2. $t = \frac{T_0}{4}$: يمرّ الجسم بمركز الاهتزاز

$\bar{x} = 0$ صاعداً: طويلة السرعة أعظميّة و
 $\bar{v} = -\omega_0 X_{\max}$ ، والتسارع معدوم.

3. $t = \frac{T_0}{2}$: الجسم في الموضع الطرقي الآخر

$\bar{x} = -X_{\max}$: السرعة معدومة، والتسارع
 $\bar{a} = +\omega_0^2 X_{\max}$ نحو مركز الاهتزاز.

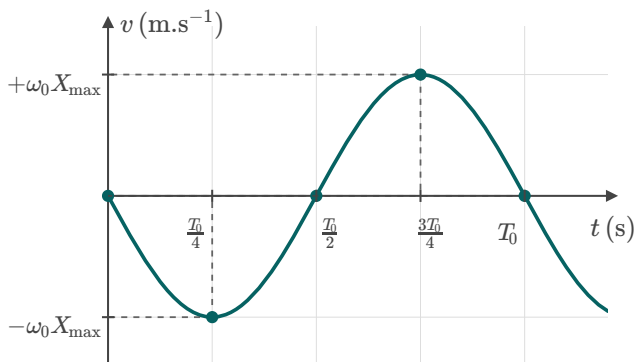


4. $t = \frac{3T_0}{4}$: يمرّ بمركز الاهتزاز نازلاً: طويلة

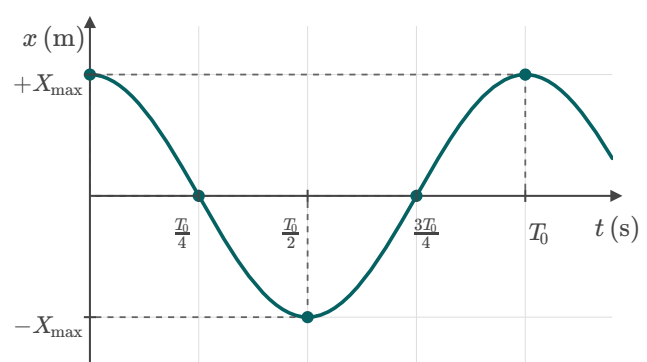
السرعة أعظميّة و $\bar{v} = +\omega_0 X_{\max}$ ،
والتسارع معدوم.

5. $t = T_0$: بعد دورٍ كاملٍ عاد الجسم إلى

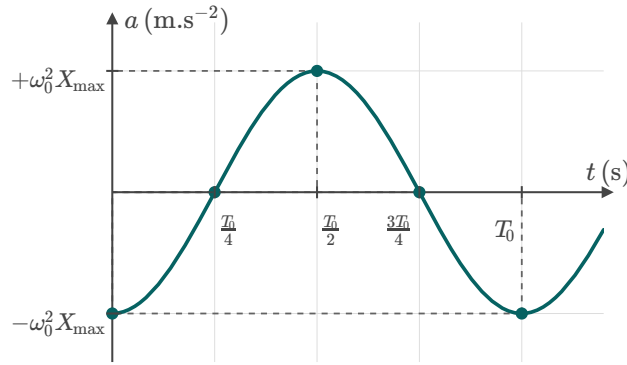
حالته في اللحظة $t = 0$.



السرعة $\bar{v} = -\omega_0 X_{\max} \sin \omega_0 t$ بدلالة الزمن.



المطال $\bar{x} = X_{\max} \cos \omega_0 t$ بدلالة الزمن.



التسارع $\bar{a} = -\omega_0^2 X_{\max} \cos \omega_0 t$ بدلالة الزمن.

النّوَّاس المرن خلال دورٍ واحد، ومعه المطال والسرعة والتسارع في اللحظات نفسها؛ للسرعة $\vec{v}$ مقياس خاصٌّ بها. عن الكتاب، الصفحات 8 إلى 10.

طويلة السرعة العظمى لجسمٍ في نوَّاسٍ مرن $0.4\pi \text{ m.s}^{-1}$ ، وسعة حركته 0.1 m . ما دوره الخاصّ؟

كيف أبدأ؟ من $v_{\max} = \omega_0 X_{\max}$ احسب النبض الخاصّ أولاً، ثم انتقل إلى الدور.

(أ) $4\pi \text{ s}$

(ب) 0.5 s

(ج) 2 s

ب. نعم: $\omega_0 = \frac{v_{\max}}{X_{\max}} = 4\pi \text{ rad.s}^{-1}$ ، ف $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0.5 \text{ s}$.

الطاقة في الحركة التوافقية البسيطة

يدرس الكتاب الطاقة على نوَّاسٍ مرنٍ أفقي: نثبت طرف نابضٍ مرنٍ مهمل الكتلة إلى بداية ساقٍ أفقيّةٍ ملساء، ونثبت إلى طرفه الآخر جسمًا صلباً كتلته m . مبدأ الفواصل O هو موضع مركز عطالة الجسم وهو ساكن. نزيح الجسم عن موضع توازنه ونتركه يهتزّ إلى جانبيه على قطعةٍ مستقيمة. والساق أفقيّة، فلا يتغيّر ارتفاع الجسم، ولا تدخل الطاقة الكامنة الثقاليّة في الحساب.

تذكّر: «إن الطاقة الميكانيكية للنّوَّاس المرن هي مجموع الطاقين: الكامنة والحركية»: $E_{\text{tot}} = E_p + E_k$. الكتاب،

الصفحة 11.

من امتحان الدورة الأولى 2016: استنتج علاقة الطاقة الميكانيكية في الحركة التوافقية البسيطة (النّوَّاس المرن غير المتخامد).

$$E_{\text{tot}} = E_p + E_k$$

1. **الطاقة الكامنة المرونيّة** طاقة النابض $E_p = \frac{1}{2} k x^2$ ، ونعوّض تابع المطال $\bar{x} = X_{\max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$:

$$E_p = \frac{1}{2} k X_{\max}^2 \cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

2. **الطاقة الحركيّة** طاقة الجسم $E_k = \frac{1}{2} m v^2$ ، ونعوّض تابع السرعة $\bar{v} = -\omega_0 X_{\max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$. الإشارة السالبة تختفي بالتربيع، لكنّ سلّم 2016 يخصم أربع درجاتٍ ممّن يُغفلها في تابع السرعة:

$$E_k = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_{\max}^2 \sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

3. **التبسيط** لكنّ $m \omega_0^2 = k$ ، لأنّ $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$:

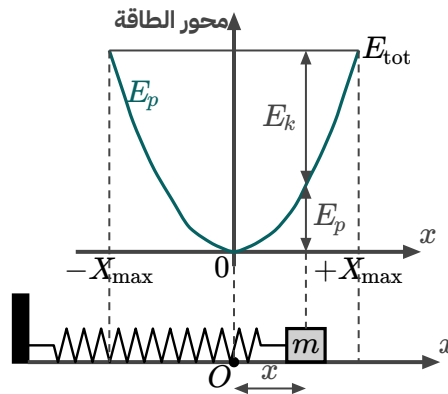
$$E_k = \frac{1}{2} k X_{\max}^2 \sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

4. **الجمع** نجمع الطاقتين، و $\cos^2 + \sin^2 = 1$:

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} k X_{\max}^2 = \text{const}$$

الطاقة الميكانيكيّة للنّوَّاس المرن غير المتخامد ثابتة: تتحوّل بين كامنةٍ وحركيّة، ومجموعهما لا يتغيّر.

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} k X_{\max}^2$$



الطاقة الكامنة $E_p = \frac{1}{2} k x^2$ قطع مكافئ، والطاقة الكليّة مستقيمٌ أفقيّ. في كلّ موضع x تملأ E_k المسافة بينهما. عن الكتاب، الصفحة 11.

الطاقة

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \text{ الطاقة الحركية.}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_{\max}^2 \sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi}) \text{ بتعويض تابع السرعة.}$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 \text{ الطاقة الكامنة المرونية.}$$

$$E_p = \frac{1}{2} k X_{\max}^2 \cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi}) \text{ بتعويض تابع المطال.}$$

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} k X_{\max}^2 = \text{const} \text{ الطاقة الكلية الميكانيكية. هكذا يجمعها الكتاب في «تعلمت».$$

الكتاب، الصفحة 12

ما شكل طاقة النّوَّاس المرن الأفقي لحظة مروره بمركز الاهتزاز؟

$$\text{كيف أبدأ؟ ما قيمة المطال في مركز الاهتزاز؟ عوّضها في } E_p = \frac{1}{2} k x^2 .$$

(أ) حركيّة وكامنة بالتساوي.

(ب) كامنة مرونيّة فقط.

(ج) حركيّة فقط.

ج. نعم: في مركز الاهتزاز $\bar{x} = 0$ ، ف $E_p = 0$ ، والطاقة كلّها حركيّة، والسرعة أعظميّة.

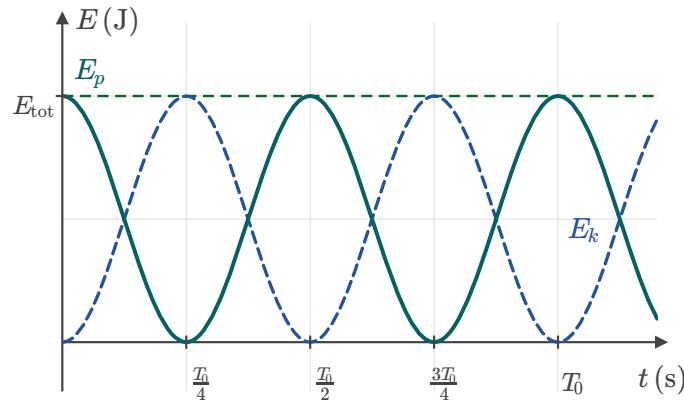
تحوّلات الطاقة مع الزمن

إذا كان $\bar{x} = X_{\max} \cos \omega_0 t$ ، كما في الشكل في الكتاب، صارت الطاقتان بدلالة الطاقة الكلية:

$$E_p = E_{\text{tot}} \cos^2 \omega_0 t$$

$$E_k = E_{\text{tot}} \sin^2 \omega_0 t$$

ومربّع جيب التمام يتكرّر بعد نصف دور، لأنّ $\cos^2 \omega_0 t = \frac{1 + \cos 2\omega_0 t}{2}$. فالطاقتان تتكرّران كلّ $\frac{T_0}{2}$ ، مرّتين في كلّ دور.



الطاقة الكامنة E_p والطاقة الحركية E_k خلال دور واحد، مع $\bar{x} = X_{\max} \cos \omega_0 t$. مجموعهما ثابت، وكلٌّ منهما يتكرر كلّ نصف دور.

انتبه: علامات الزمن على الشكل في الكتاب، الصفحة 11، مُزاحة: تحت أول انعدام لـ E_p كُتب $\frac{T_0}{2}$ ، وتحت القمة التالية T_0 . والصحيح $\frac{T_0}{4}$ و $\frac{T_0}{2}$ ، كما في الشكل هنا: في $\frac{T_0}{4}$ يمرّ الجسم بمركز الاهتزاز، فتتعدم E_p .

ويسأل الكتاب في النشاط (6): أين تكون كلّ من الطاقين الحركية والكامنة المرونية عظمى، وأين تكون معدومة؟

تذكّر: الطاقة الحركية عظمى في مركز الاهتزاز، ومعدومة في الموضعين الطرفيين. والطاقة الكامنة المرونية في النّوَّاس الأفقيّ بالعكس: عظمى في الموضعين الطرفيين، ومعدومة في مركز الاهتزاز.

نوّاس مرّن أفقيّ دوره الخاص $T_0 = 2 \text{ s}$. ما أقصر مدّة تتكرّر بعدها قيم طاقته الكامنة المرونية؟

كيف أبدأ؟ الطاقة الكامنة تتبع $\cos^2 \omega_0 t$. كم مرّة تبلغ أعظمها خلال دور واحد؟

أ) 1 s

ب) 2 s

ج) 4 s

أ. نعم: الطاقتان تتكرران كلّ نصف دور، $\frac{T_0}{2} = 1 \text{ s}$. فالطاقة الكامنة أعظميّة في الموضعين الطرفيين كليهما، وهما في كلّ دور.

وفي آخر الصفحة 12 يحلّ الكتاب تطبيقاً واحداً، وهو يجمع ما سبق: من التابع الزمنيّ نقرأ ثوابت الحركة، ثمّ الدور، ثمّ موضع الجسم في لحظة بدء الزمن.

تطبيق الكتاب، الصفحة 12: نوّاس مرّن أفقيّ مؤلّف من جسمٍ ونابضٍ مرّن، تابعه الزمنيّ $\bar{x} = 0.1 \cos(\pi t + \pi)$. حدّد ثوابت الحركة لهذا النّوَّاس، واحسب دوره T_0 ، وحدّد موضع الجسم في لحظة بدء الزمن.

$$\bar{x} = 0.1 \cos(\pi t + \pi)$$

1. المقارنة نكتب الشكل العام ونقارنه بالتابع المعطى حدًا بحد:

$$\bar{x} = X_{\max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

2. ثوابت الحركة بالمقارنة نجد سعة الحركة والنبض والطور الابتدائي:

$$X_{\max} = 0.1 \text{ m}$$

$$\omega_0 = \pi \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\bar{\varphi} = +\pi \text{ rad}$$

3. الدور الخاص من العلاقة:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \text{ s}$$

4. لحظة بدء الزمن نعوض $t = 0$:

$$\bar{x} = 0.1 \cos \pi = -0.1 \text{ m}$$

الجسم في مطاله الأعظمي السالب في لحظة بدء الزمن: الطور الابتدائي $+\pi$ يضعه في الموضع الطرفي المقابل لـ $+X_{\max}$.

$$t = 0 \implies \bar{x} = -X_{\max}$$

المصدر: الفيزياء، الصفحات 8 إلى 12 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.