

☆ بسيطة

الفيزياء، البكالوريا، الفرع العلمي النّوَّاس الثَّقَلِيّ المَرَكَّب

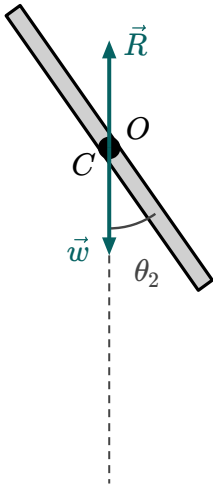
عزم الإرجاع، والسعات الزاويّة الصغيرة، والدور الخاصّ، ونظرية هاينز، وطول النّوَّاس البسيط المواقف
الحركة والتّحريك . الوحدة 1 . الدرس 3 (1 من 3)

في درس نوّاس الفتل أعاد سلكُ الفتل الساقّ نحو موضع توازنها. أمّا هنا فلا سلك: جسمٌ صلبٌ معلقٌ بمحورٍ أفقيّ يعيده ثقله نفسه. نتابع مع الكتاب في الصفحات 25 إلى 28: متى يكون الجسم نوّاساً ثقلياً، ومن أين يأتي عزم الإرجاع، ولماذا تكون الحركة جيبيّةً في السعات الصغيرة، وممّ يتعلّق الدور الخاصّ. وقد جاء النّوَّاس الثَّقَلِيّ المَرَكَّب المسألة الأولى في سبعٍ من أوراق امتحان البكالوريا منذ 2016، وطلب في سبعٍ منها طول النّوَّاس البسيط المواقف له، فنشره في آخر الدرس.

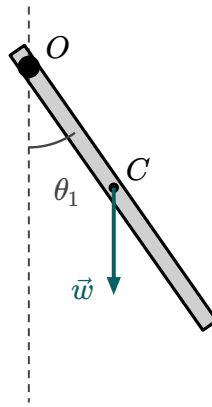
ما النّوَّاس الثَّقَلِيّ المَرَكَّب؟

يبدأ الكتاب بالأرجوحة: نزيحها عن موضع توازنها فتتهزّ، ثمّ تتخامد حركتها وتقف حتّى ندفعها من جديد. وكذلك رقص الساعة الجداريّة يحتاج إلى تعويض الطاقة المبدّدة كي يبقى يهتزّ. وفي عنوان الدرس في الكتاب «النّوَّاس الثَّقَلِيّ غير المتخامد»: نهمل كلّ ما يبذد الطاقة، فلا تتناقص السعة.

وفي النشاط (1)، الصفحة 26، نعلّق مسطرةً بحاملٍ مثبتٍ على لوح، ومحور الدوران أفقيّ:



1. معلقةً من طرفها: نعلّقها من طرفها العلويّ في O فتتوازن شاقولياً. تؤثر فيها قوتان: ثقلها $\vec{w}$ في مركز عطالتها C ، وقوة ردّ فعل محور الدوران $\vec{R}$ ، وحامل كلّ منهما يمرّ من المحور، فعزمهما معدومان.



2. مُزاحة: نزيحها بزاوية θ_1 ونتركها دون سرعة ابتدائية: لم يعد حامل الثقل يمرّ من المحور، فعزمه يعيدها نحو موضع توازنها، فتتهزّ. أمّا عزم $\vec{R}$ فمعدوم، لأنّ حاملها يمرّ من المحور.

3. معلقةً من منتصفها: نعلّقها من ثقبٍ في منتصفها ونزيحها بزاوية θ_2 : تبقى حيث تركناها. مركز عطالتها C على المحور، فحامل ثقلها يمرّ من المحور في أيّ وضع، وعزمه معدوم.

مسطرةً حول محورٍ أفقيّ: معلقةً من طرفها تتوازن، ومُزاحةً تهزّ، ومعلقةً من منتصفها تبقى حيث نتركها. عن الكتاب، الصفحة 26، النشاط (1).

تذكّر: «إنّ كلّ جسم صلب يهتزّ بتأثير عزم قوّة ثقله حول محور دوران عموديّ على مستويّه، ولا يمرّ من مركز عطالته، يُسمّى: بالنّوَّاس الثَّقَلِيّ». الكتاب، الصفحة 26.

وفي «تعلّمت» يسمّيه الكتاب النّوَّاس الثَّقَلِيّ المَرَكَّب، ويشترط أن يكون المحور أفقيّاً، الصفحة 34:

تذكّر: «النّوَّاس الثَّقَلِيّ المَرَكَّب: كلّ جسم صلب يهتزّ بتأثير ثقله في مستوٍ شاقوليّ حول محور دوران أفقيّ لا يمرّ من مركز عطالته، وعموديّ على مستويّه». الكتاب، الصفحة 34.

و«المَرَكَّب» يميّزه من النّوَّاس الثَّقَلِيّ البسيط في الصفحة 29: ذاك نقطة مادّية، وهذا جسم صلب تتوزّع كتلته.

انتبه: المحور الأفقيّ وحده لا يكفي: يجب ألا يمرّ من مركز العطالة. فإن مرّ منه، كالمسطرة المعلّقة من منتصفها، لم يكن للثقل عزمّ حوله، ولم يهتزّ الجسم.

أيّ الأجسام الآتية نوّاس ثقليّ مَرَكَّب؟

| كيف أبداً؟ أسأل في كلّ حالة: ما الذي يعيد الجسم نحو موضع توازنه؟ وأين يقع مركز عطالته من المحور؟

(أ) ساق أفقيّة معلّقة من منتصفها بسلك فتلّ شاقوليّ، تدور حوله ذهاباً وإياباً.

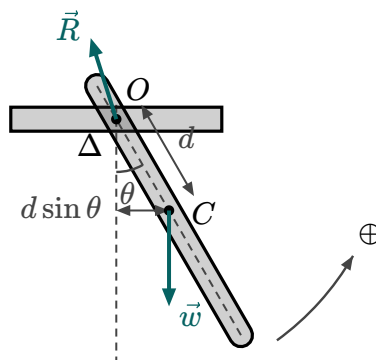
(ب) قرص متجانس يدور حول محور أفقيّ يمرّ من مركزه.

(ج) مسطرة معلّقة من ثقب قرب طرفها بمحور أفقيّ، تهتزّ في مستوٍ شاقوليّ.

ج. نعم: المحور أفقيّ ولا يمرّ من مركز عطالتها، فإذا أرحناها أعادها عزم ثقلها، كما في النشاط (1).

عزم الإرجاع والمعادلة التفاضليّة

يدرس الكتاب في الصفحة 27 جسماً صلباً كتلته m ومركز عطالته C ، يدور حول محور أفقيّ Δ يمرّ من النقطة O منه، و $d = OC$. نزيحه عن موضع توازنه الشاقوليّ بزاوية θ ونتركه دون سرعة ابتدائيّة. تؤثر فيه قوتان: ثقله $\vec{w}$ ، وقوّة ردّ فعل محور الدوران على الجسم $\vec{R}$.



النّوّاس الثّقليّ المركّب، وهو هنا ساق، مُزاحاً بالزاوية θ : النقل $\vec{w}$ في C ، و $\vec{R}$ في O ، والبعد بين حامل الثقل ومحور الدوران $d \sin \theta$ ، و $\oplus$ الجهة الموجبة. عن الكتاب، الصفحة 27.

نطبّق العلاقة الأساسيّة في التحريك الدورانيّ (نظرية التسارع الزاويّ) حول المحور Δ ، ونختار الجهة الموجبة للدوران عكس جهة دوران عقارب الساعة، كما في الكتاب، الصفحة 27.

$$\sum \bar{\Gamma}_{\Delta} = I_{\Delta} \bar{\alpha}$$

1. **مجموع العزوم** نكتب عزميّ القوّتين المؤثّرتين في الجسم:

$$\bar{\Gamma}_{\vec{w}/\Delta} + \bar{\Gamma}_{\vec{R}/\Delta} = I_{\Delta} \bar{\alpha}$$

2. **عزم ردّ فعل المحور** حامل $\vec{R}$ يمرّ من محور الدوران:

$$\bar{\Gamma}_{\vec{R}/\Delta} = 0$$

3. **عزم الثقل** البعد بين حامل الثقل ومحور الدوران $d \sin \theta$ ، والثقل يدير الجسم نحو موضع التوازن، أي في الجهة السالبة حين تكون الزاوية موجبة:

$$\bar{\Gamma}_{\vec{w}/\Delta} = -(d \sin \theta) w$$

4. **التعويض** نعوّض، والثقل $w = m g$:

$$\begin{aligned} -(d \sin \theta) w + 0 &= I_{\Delta} \bar{\alpha} \\ -m g d \sin \bar{\theta} &= I_{\Delta} \bar{\alpha} \end{aligned}$$

5. **المعادلة التفاضليّة** لكنّ التسارع الزاويّ هو المشتقّ الثاني للمطال الزاويّ بالنسبة للزمن، $\bar{\alpha} = (\bar{\theta})''_t$ ، فنقسم على I_{Δ} :

$$(\bar{\theta})''_t = -\frac{m g d}{I_{\Delta}} \sin \bar{\theta} \quad (1)$$

المعادلة (1) تحتوي $\sin \bar{\theta}$ لا $\bar{\theta}$ نفسها، فليست من شكل معادلة الحركة الجبّيّة.

$$(\bar{\theta})''_t = -\frac{m g d}{I_{\Delta}} \sin \bar{\theta}$$

نذكّر: «وهي معادلة تفاضليّة من المرتبة الثانية تحتوي $\sin \theta$ بدلاً من θ فحلّها ليس جيبيّاً، ومن ذلك فإنّ حركة النّوّاس الثّقليّ هي حركة اهتزازيّة غير توافقيّة.» الكتاب، الصفحة 27.

انتبه: لا تنس الإشارة السالبة في عزم الثقل، فهو يعاكس الزاوية بالإشارة. وعزم $\vec{R}$ معدوم لأن حاملها يمر من المحور، لا لأثقلها صغيرة: في موضع التوازن الساكن تعادل الثقل.

جسم صلب كتلته m يهتز حول محور أفقي Δ ، ومركز عطالته على بعد d من المحور، والجهة الموجبة عكس جهة دوران عقارب الساعة. ما عزم ثقله حول المحور حين يكون مطاله الزاوي $\bar{\theta}$ ؟

كيف أبدأ؟ ما البعد بين حامل الثقل ومحور الدوران؟ وفي أي جهة يدير الثقل الجسم حين تكون $\bar{\theta} > 0$ ؟

$$\Gamma_{\vec{w}/\Delta} = -m g d \sin \bar{\theta} \quad (\text{أ})$$

$$\Gamma_{\vec{w}/\Delta} = +m g d \sin \bar{\theta} \quad (\text{ب})$$

$$\Gamma_{\vec{w}/\Delta} = -m g d \cos \bar{\theta} \quad (\text{ج})$$

أ. نعم: البعد بين حامل الثقل والمحور $d \sin \theta$ ، والإشارة السالبة لأن الثقل يعيد الجسم نحو موضع التوازن، بعكس الزاوية.

الساعات الزاوية الصغيرة

ويسأل الكتاب: كيف تصبح الحركة من أجل الساعات الزاوية الصغيرة $\theta \leq 0.24 \text{ rad}$ ؟ عندئذٍ $\sin \theta \approx \theta$ ، والزاوية بالراديان. ويكتب الكتاب الحد بالدرجات أيضاً، 14° ، في الصفحتين 28 و31، و 0.24 rad أقل منه بقليل. ولا يقول الكتاب من أين يأتي هذا الحد، فنتحقق منه نحن: عند $\theta = 0.24 \text{ rad}$ يكون $\sin \theta \approx 0.238$ ، والفرق أقل من واحد في المئة. نعوض $\sin \bar{\theta} \approx \bar{\theta}$ في المعادلة (1)، ثم نبرهن أن الحركة جيبيّة دورانيّة، كما في الكتاب، الصفحتان 27 و28.

$$(\bar{\theta})''_t = -\frac{m g d}{I_\Delta} \sin \bar{\theta}$$

1. المعادلة (2) من أجل الساعات الزاوية الصغيرة تصبح المعادلة:

$$(\bar{\theta})''_t = -\frac{m g d}{I_\Delta} \bar{\theta} \quad (2)$$

2. الحلّ وهي معادلة تفاضليّة من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبيّاً من الشكل:

$$\bar{\theta} = \theta_{\max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

3. التحقق نشتق تابع المطال الزاوي مرتين بالنسبة للزمن:

$$\begin{aligned} (\bar{\theta})''_t &= -\omega_0^2 \theta_{\max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi}) \\ \bar{\alpha} &= (\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2 \bar{\theta} \end{aligned} \quad (3)$$

4. المطابقة بالمطابقة بين (2) و(3):

$$\omega_0^2 = \frac{m g d}{I_{\Delta}}$$

5. النبض الخاص وهذا ممكن لأنّ المقادير g و m و d و I_{Δ} موجبة:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m g d}{I_{\Delta}}} > 0$$

من أجل السعات الزاوية الصغيرة حركة النّوَّاس الثّقليّ المركّب جيبيّة دورانيّة، نبضها الخاص:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m g d}{I_{\Delta}}}$$

وهذا البرهان طُلب للنّوَّاس الثّقليّ المركّب في امتحان الدورة الثانية 2019.

انتبه: نعدّ الحركة جيبيّة ودورها مستقلاً عن السعة ما دامت $\theta_{\max} \leq 0.24 \text{ rad}$. أمّا بسعة أكبر فالحركة اهتزازيّة غير توافقيّة، والدور أطول، كما في الصفحة 31 من الكتاب. والزاوية في هذا الشرط بالراديان، فحوّل الدرجات قبل أن تقارن.

مق تكون حركة النّوَّاس الثّقليّ جيبيّة دورانيّة؟

كيف أبدأ؟ متى تصير المعادلة (1) من شكل معادلة الحركة الجيبية $\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \theta$ ؟

(أ) في كلّ سعة، لأنّ عزم الإرجاع يعاكس الزاوية بالإشارة.

(ب) حين تكون سعته الزاوية صغيرة، $\theta_{\max} \leq 0.24 \text{ rad}$.

(ج) حين يكون نوّاساً بسيطاً، أي كرة صغيرة معلقةً بخيط، في كلّ سعة.

ب. نعم: عندئذٍ $\sin \theta \approx \theta$ ، فتصير المعادلة (1) من الشكل $\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \theta$ ، وحلّها جيبيّ.

الدور الخاص وبعد مركز العطالة

ومن $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ يستنتج الكتاب علاقة الدور الخاص، الصفحة 28:

الدور الخاصّ للنّوَّاس الثَّقَلِيّ

$$\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{m g d}{I_{\Delta}}} \text{ بالمساواة بين علاقَيّ النّبض.}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta}}{m g d}} \text{ العلاقة العامّة للدور الخاصّ للنّوَّاس الثَّقَلِيّ في حالة الاهتزازات صغيرة السعة.}$$

T_0 دور النّوَّاس الثَّقَلِيّ الخاصّ بسعةٍ زاويّةٍ صغيرة، واحدته s .

I_{Δ} عزم عطالة الجسم الصلب حول محور الدوران، واحدته kg.m^2 .

d بعد محور الدوران عن مركز عطالة الجسم الصلب C ، واحدته m .

الكتاب، الصفحة 28

و m كتلة الجسم كلّهِ. ويحسب الكتاب d بعلاقة التوازن الدورانيّ حول محورٍ يمرّ من C ، أو بالعلاقة الآتية، إذ نعدّ الجسم أجزاءً نفترضها نقاطاً ماديّةً على مستقيمٍ واحدٍ يمرّ من محور الدوران، كأجزاء ساقٍ واحدة، كتلتها m_1 و m_2 وغيرها، تبعد عن محور الدوران r_1 و r_2 وغيرها:

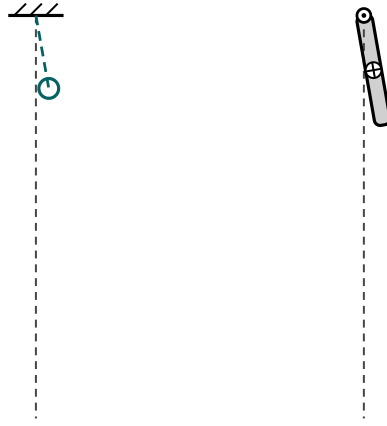
$$OC = d = \frac{m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}$$

$$d = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{\sum m_i}$$

تذكّر: « $\bar{r}$ مقدارٌ جبريٌّ نعدّه موجباً إذا كان مركز عطالة الكتلة المهيّزة تحت محور الدوران، وسالباً إذا كان مركز عطالة الكتلة المهيّزة فوق محور الدوران. » الكتاب، الصفحة 28.

انتبه:  في $m g d$ تدخل الكتلة الكلّية، و d بعد مركز عطالة الجملة كلّها عن المحور، لا طول الساق ولا بعد إحدى الكتل عنه. وكتلة فوق المحور تدخل بإشارةٍ سالبة.

وفي المحاكاة أدناه ساق التطبيق في الصفحة 28، طولها 0.375 m ومعلّقة من طرفها العلوي، وكتلتها في المحاكاة 1 kg . ومعها طول الساق، وبعد المحور عن منتصفها، والسعة الزاويّة، وكتلة نقطيّة في طرفها السفلي. والنّوَّاس البسيط المنقّط إلى جانبها نعود إليه في آخر الدرس.



النّوَّاس الثّقليّ المركّب كما في التطبيق في الكتاب، الصفحة 28: ساق متجانسة معلقة من طرفها العلويّ، وإلى جانبها نوّاس بسيط منقّط يهتزّ معها بالدور نفسه.

ساق مهملة الكتلة تهتزّ حول محورٍ أفقيّ، وعليها كتلة نقطيّة $m_1 = 0.2 \text{ kg}$ على بعد 0.1 m فوق المحور، وكتلة نقطيّة $m_2 = 0.3 \text{ kg}$ على بعد 0.4 m تحته. ما بعد مركز عطالة الجملة عن المحور؟

كيف أبدأ؟ اكتب $\vec{r}$ لكل كتلة بإشارتها قبل أن تعوّض.

(أ) $d = 0.28 \text{ m}$

(ب) $d = 0.2 \text{ m}$

(ج) $d = 0.15 \text{ m}$

ب. نعم: $d = \frac{0.2 \times (-0.1) + 0.3 \times 0.4}{0.2 + 0.3}$ ، أي $d = \frac{0.1}{0.5} = 0.2 \text{ m}$ ، ومركز العطالة تحت المحور.

نظرية هايفنز

يحلّ الكتاب في الصفحة 28 تطبيقاً واحداً، وفيه عزم عطالة الساق معطى حول محورٍ يمرّ من مركز عطالتها، والساق معلقة من طرفها، فينقله الكتاب إلى محور الدوران بنظرية هايفنز.

تطبيق الكتاب، الصفحة 28: نوّاس ثقليّ مؤلّف من ساق متجانسة طولها $L = 0.375 \text{ m}$ وكتلتها M ، معلقة من طرفها العلويّ بمحورٍ أفقيّ عموديّ على مستويها الشاقوليّ. نزيحها عن موضع توازنها الشاقوليّ زاويةً صغيرةً $\theta \leq 14^\circ$ ونتركها دون سرعة ابتدائية. استنتج بالرموز علاقة الدور الخاصّ انطلاقاً من العلاقة العامة، ثمّ احسب قيمته، علماً أنّ عزم عطالة الساق حول

محورٍ عموديّ على مستويها ومارّ من مركز عطالتها $I_{\Delta/c} = \frac{1}{12} M L^2$.

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta}}{m g d}}$$

1. البعد الساق متجانسة، فمركز عطالتها في منتصفها، والمحور في طرفها:

$$d = \frac{L}{2}$$

2. نظرية هايفنز لإيجاد عزم عطالة الساق حول المحور المارّ من O نطبّق نظرية هايفنز، وكتلة النّوَّاس هنا $m = M$:

$$\begin{aligned} I_{\Delta} &= I_{\Delta/c} + M d^2 \\ I_{\Delta} &= \frac{1}{12} M L^2 + M \left(\frac{L}{2} \right)^2 \\ I_{\Delta} &= \frac{1}{3} M L^2 \end{aligned}$$

3. العلاقة بالرموز نعوّض في علاقة الدور، فتختصر M :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} M L^2}{M g \frac{L}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

4. القيمة يعوّض الكتاب $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ ، ويأخذ دون أن يقول $\pi^2 = 10$ ، أي $4\pi^2 = 40$:

$$\begin{aligned} T_0 &= 2\pi \sqrt{\frac{2 \times 0.375}{3 \times 10}} = 2\pi \sqrt{0.025} \\ T_0 &= \sqrt{40 \times 0.025} = 1 \text{ s} \end{aligned}$$

نظرية هايفنز تنقل عزم العطالة من محور يمرّ من مركز العطالة إلى محور يوازيه على بعد d منه.

$$I_{\Delta} = I_{\Delta/c} + M d^2$$

لاحظ أنّ نصّ التطبيق لا يذكر g ولا π^2 : الحلّ يعوّض $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ ، ويصل إلى 1 s بأخذ $\pi^2 = 10$ ، وبالقيمة الدقيقة لـ π يكون $T_0 \approx 0.99 \text{ s}$. وبهاتين القيمتين نحسب الأدوار في هذا الدرس، كما في مسائل النّوَّاس في الامتحانات.

نظرية هايفنز

$I_{\Delta} = I_{\Delta/c} + M d^2$ حول محور يمرّ من مركز العطالة، و I_{Δ} حول محور يوازيه على بعد d منه، و M كتلة الجسم. يطبّقها الكتاب في التطبيق، دون فقرة خاصّة بها.

الكتاب، الصفحة 28

أمّا الكتلة النقطيّة فلا تحتاج إلى نظرية هايفنز: عزم عطالتها حول محور على بعد r منها $m r^2$ ، كما يكتبه الكتاب لكرة النّوَّاس البسيط $I_{\Delta} = m l^2$ ، الصفحة 29. وعزم عطالة جملة مجموع عزوم عطالة أجزائها حول المحور نفسه؛ وهذه إضافة ممّا من

درس نوّاس الفتل، فليست في هذا الدرس من الكتاب، ومسائله في الصفحتين 36 و37 تحتاجها.

انتبه: خطآن شائعان: أن نضع في $M d^2$ بعداً غير بعد مركز عطالة الجسم عن المحور؛ وأن نكتب أحد الحدّين وحده، $I_{\Delta/c}$ أو $M d^2$. أمّا الكتلة النقطيّة فعزم عطالتها $m r^2$ مباشرة، ولا حاجة فيها إلى نظرية هايفنز.

ساق متجانسة طولها $L = 0.6 \text{ m}$ وكتلتها $M = 1 \text{ kg}$ ، تهتزّ حول محورٍ أفقيٍّ عموديٍّ عليها يمرّ من نقطة تبعد 0.1 m عن منتصفها. ما عزم عطالتها حول هذا المحور؟ علماً أنّ $I_{\Delta/c} = \frac{1}{12} M L^2$.

| كيف أبدأ؟ احسب عزم العطالة حول المنتصف أولاً، ثمّ انقله إلى المحور، وانتبه إلى بعد المحور عن المنتصف.

$$I_{\Delta} = 0.04 \text{ kg.m}^2 \quad (\text{أ})$$

$$I_{\Delta} = 0.03 \text{ kg.m}^2 \quad (\text{ب})$$

$$I_{\Delta} = 0.12 \text{ kg.m}^2 \quad (\text{ج})$$

$$\text{أ. نعم: } I_{\Delta/c} = \frac{1}{12} \times 1 \times (0.6)^2 = 0.03 \text{ ، و } M d^2 = 1 \times (0.1)^2 = 0.01 \text{ ، ف } I_{\Delta} = 0.04 \text{ kg.m}^2$$

طول النّوَّاس البسيط المواق

هذه الفقرة إضافةً ممّا، ليست في دروس الكتاب: لا يشرح الكتاب النّوَّاس البسيط المواق في أيّ درس، لكنّه يطلب حساب طوله في «مسائل عامة» في آخره، الصفحة 258: «احسب طول النّوَّاس البسيط المواق لهذا النّوَّاس.» وطلبته امتحانات البكالوريا في سبعٍ من تسع مسائل على النّوَّاس الثَّقَلِيّ المَرَكَّب، في أوراق الامتحانات التي قرأناها منذ 2016.

النّوَّاس البسيط المواق لنّوَّاسٍ ثَقَلِيٍّ مَرَكَّب هو النّوَّاس البسيط الذي يهتزّ بالدور الخاصّ نفسه، في الساعات الصغيرة. وفي أوراق الامتحان يُسمّى أيضاً النّوَّاس الثَّقَلِيّ البسيط المواق.

وتمهّد لذلك «ملاحظة» الكتاب في الصفحة 29: النّوَّاس البسيط حالةٌ خاصّةٌ من النّوَّاس الثَّقَلِيّ المَرَكَّب، كتلته m كلّها على بعد l من المحور، فنعوّض في العلاقة العامّة $d = l$ و $I_{\Delta} = m l^2$ ، ونصل إلى الدور الذي يستنتجه الكتاب في الصفحة نفسها بدراسةٍ تحريكيةٍ:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m l^2}{m g l}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

ونعكس الآن الطريق: لنّوَّاسٍ مَرَكَّبٍ معلوم، ما طول النّوَّاس البسيط الذي يهتزّ بدوره نفسه؟

نبحث عن طول النّوَّاس البسيط l الذي له دور النّوَّاس المَرَكَّب نفسه، في السّاعات الصغيرة.

$$l = \frac{I_{\Delta}}{m d}$$

1. تساوي الدورين الدور الخاصّ للنّوَّاس البسيط يساوي الدور الخاصّ للنّوَّاس المَرَكَّب:

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta}}{m g d}}$$

2. التربيع نقسم الطرفين على 2π ثمّ نربّعهما:

$$\frac{l}{g} = \frac{I_{\Delta}}{m g d}$$

3. الطول نضرب الطرفين في g ، فيختفي تسارع الجاذبيّة:

$$l = \frac{I_{\Delta}}{m d}$$

طول النّوَّاس البسيط المواقف لا يتعلّق بتسارع الجاذبيّة g ، بل بالجسم ومحوره وحدهما.

$$l = \frac{I_{\Delta}}{m d}$$

وفي سلاّم تصحيح الامتحانات يُحسب الطول بالأرقام: الدور الخاصّ للنّوَّاس المَرَكَّب أوّلًا، ثمّ يُعوّض في $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ويُستخرج l . والطريقان يعطيان الطول نفسه.

مثالّ من عندنا: ساقّ شاقوليّة مهملة الكتلة طولها 1 m ، تهتزّ حول محورٍ أفقيّ يمرّ من النقطة O منها، على بعد 0.15 m من طرفها العلويّ. في طرفها العلويّ كتلة نقطيّة $m_1 = 0.6 \text{ kg}$ ، وفي طرفها السفليّ كتلة نقطيّة $m_2 = 0.4 \text{ kg}$. احسب بعد مركز عطالة الجملة عن المحور، وعزم عطالتها حوله، ودورها الخاصّ في السّاعات الصغيرة، وطول النّوَّاس البسيط المواقف لها. نأخذ $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ و $\pi^2 = 10$.

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta}}{m g d}}$$

1. الأبعاد الجبريّة m_1 فوق المحور و m_2 تحته، وبين O والطرف السفليّ $1 - 0.15 = 0.85 \text{ m}$:

$$\bar{r}_1 = -0.15 \text{ m} \quad \bar{r}_2 = +0.85 \text{ m}$$

2. الكتلة الكليّة نجمع الكتلتين:

$$m = m_1 + m_2 = 1 \text{ kg}$$

3. بعد مركز العطالة بعلاقة الكتاب، والإشارة سالبةً للكتلة العلويّة:

$$d = \frac{0.6 \times (-0.15) + 0.4 \times 0.85}{1}$$

$$d = \frac{0.25}{1} = 0.25 \text{ m}$$

4. عزم العطالة كتلتان نقطيتان، فعزم العطالة مجموع $m r^2$ ، والتربيع يحو الإشارة:

$$I_{\Delta} = 0.6 \times (0.15)^2 + 0.4 \times (0.85)^2$$

$$I_{\Delta} = 0.0135 + 0.289 = 0.3025 \text{ kg.m}^2$$

5. الدور الخاصّ النسبة تحت الجذر $0.121 = \frac{0.3025}{1 \times 10 \times 0.25} = \frac{I_{\Delta}}{m g d}$ ، و $4\pi^2 = 40$:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{0.121}$$

$$T_0 = \sqrt{40 \times 0.121} = 2.2 \text{ s}$$

6. طول النّوَّاس البسيط المواق من العلاقة السابقة:

$$l = \frac{I_{\Delta}}{m d} = \frac{0.3025}{1 \times 0.25}$$

$$l = 1.21 \text{ m}$$

7. التّحقّق ودور نوّاسٍ بسيطٍ بهذا الطول:

$$2\pi\sqrt{\frac{1.21}{10}} = \sqrt{40 \times 0.121} = 2.2 \text{ s}$$

النّوَّاس البسيط المواق هنا أطول من الساق نفسها: الكتلة العلويّة تزيد عزم العطالة وتنقص عزم الإرجاع، فيطول الدور.

$$l = 1.21 \text{ m} > 1 \text{ m}$$

ولو نسينا إشارة الكتلة العلويّة لوجدنا $d = 0.43 \text{ m}$ ودوراً قريباً من 1.7 s بدل 2.2 s . وفي المحاكاة في فقرة

الدور الخاصّ يهتزّ إلى جانب الساق نوّاسٍ بسيطٍ منقّط طوله $l = \frac{I_{\Delta}}{m d}$ ، في الطور نفسه، وتعرض المحاكاة طوله بعد

تشغيل الحركة.

ما طول النّوَّاس البسيط المواقت لساق التطبيق في الصفحة 28؟ طولها $L = 0.375 \text{ m}$ وكتلتها M ، ومعلّقة من طرفها العلوي، ف $I_{\Delta} = \frac{1}{3} M L^2$ و $d = \frac{L}{2}$.

كيف أبدأ؟ عوّض في $l = \frac{I_{\Delta}}{m d}$ بالرموز أولاً، والكتلة هنا $m = M$.

(أ) $l = 0.375 \text{ m}$

(ب) $l = 0.1875 \text{ m}$

(ج) $l = 0.25 \text{ m}$

ج. نعم: $l = \frac{\frac{1}{3} M L^2}{M \frac{L}{2}} = \frac{2L}{3}$ ، أي $l = 0.25 \text{ m}$. وبأخذ $\pi^2 = 10$ يكون دوره $2\pi\sqrt{\frac{0.25}{10}} = 1 \text{ s}$ ، دور الساق نفسه.

المصدر: الفيزياء، الصفحات 25 إلى 28 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.