

بسيطة

الفيزياء، البكالوريا، الفرع العلمي

معادلة برنولي وتطبيقاتها

الضغط والسرعة، ونظرية برنولي واستنتاجها، والأنبوب الأفقي، ومعادلة المانومتر، ونظرية تورشيلي، وأنبوب فنتوري الحركة والتحرك . الوحدة 1 . الدرس 4 (2 من 2)

ربطت معادلة الاستمرارية في الدرس السابق السرعة بمساحة المقطع: حيث يضيق الأنبوب يجري السائل أسرع. ونسأل الآن: ماذا يحدث لضغط السائل حين تزداد سرعته؟ نتابع مع الكتاب في الصفحات 43 إلى 46: نشاطان، ثم نظرية برنولي واستنتاجها، ثم ثلاثة تطبيقات: السوائل الساكنة، وسرعة خروج السائل من فتحة خزان، وأنبوب فنتوري. وفي امتحان البكالوريا طلبت سرعة الخروج من فتحة الخزان في الدورة الثانية 2018، وأنبوب فنتوري في الدورة الأولى 2024، ومسألة المضخة التي ترفع الماء في 2020 و2023، فنحل في آخر الدرس مثلاً من عندنا عليها.

الضغط والسرعة

في النشاط الأول، الصفحة 43، نعلق ورقتين بخيطين شاقوليتين متقابلتين، وننفخ بينهما بقوة بواسطة أنبوب صغير. والنتيجة قد تفاجئك: لا تتباعد الورقتان، بل تقتربان.

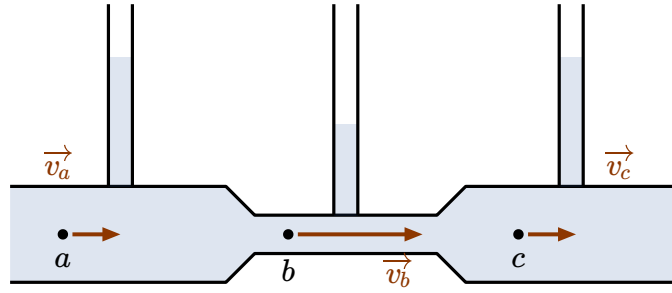


1. قبل النفخ: الورقتان معلقتان شاقوليتين، والهواء حولهما ساكن.
2. في أثناء النفخ: يجري الهواء بين الورقتين بسرعة $\vec{v}$ ، فتقتربان.

ورقتان معلقتان بخيطين، والنفخ بينهما. الرسم من عندنا على النشاط الأول، الصفحة 43.

تذكر: «ينقص ضغط السائل كلما ازدادت سرعته». الكتاب، الصفحة 43. وهذا على الارتفاع نفسه، كما سنرى في معادلة برنولي.

وفي النشاط الثاني سائل جريانه مستقر عبر أنبوب أفقي ذي مقاطع مختلفة، وعليه ثلاثة أنابيب شاقولية عند النقاط a و b و c . يسأل الكتاب: لماذا تختلف ارتفاعات سطح السائل فيها؟ وعند أي النقاط تكون سرعة جسيم السائل أكبر؟



أنبوب أفقي يضيق عند b ، والسائل في الأنبوب الشاقولي عند b أدنى منه عند a و c . عن الكتاب، الصفحة 43.

والجواب من عندنا، فالكتاب يتركه سؤالاً: مقطع الأنبوب عند b أصغر، فالسرعة عندها أكبر بمعادلة الاستمرارية. والضغط عندها أقل، فلا يرفع السائل في أنبوبها الشاقولي إلا أدنى. فمن أين جاءت الزيادة في الطاقة الحركية عند b ؟ من الضغط نفسه، وهذا ما تقوله نظرية برنولي.

انتبه: لا تقل: السرعة أكبر فالضغط أكبر. في أنبوب أفقي العكس صحيح: حيث يجري السائل أسرع يكون ضغطه أقل.

يجري ماء جرياناً مستقرّاً في أنبوب أفقي يضيق في وسطه. ماذا يحدث في الجزء الضيق مقارنةً بالجزء الواسع؟

كيف أبدأ؟ السرعة من معادلة الاستمرارية، ثم الضغط من نتيجة النشاط الأول.

(أ) السرعة أكبر، والضغط أكبر.

(ب) السرعة أصغر، والضغط أكبر.

(ج) السرعة أكبر، والضغط أقل.

ج. نعم: المقطع أصغر فالسرعة أكبر، والأنبوب أفقي فالضغط حيث السرعة أكبر أقل، كالنقطة b في النشاط الثاني.

نظرية برنولي

تذكّر: نظرية برنولي «تربط بين الضغط وسرعة الجريان والارتفاع عند أي نقطة من مجرى سائل مثالي، وتنص على: أن مجموع الضغط والطاقة الحركية لواحدة الحجوم، والطاقة الكامنة الثقالية لواحدة الحجوم تساوي مقداراً ثابتاً عند أي نقطة من نقاط خط الانسياب لسائل جريانه مستقرّاً» الكتاب، الصفحتان 43 و 44.

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \text{const}$$

P ضغط السائل، و ρ كتلته الحجمية، و v سرعته، و z ارتفاع النقطة عن مستوٍ مرجعي. وفي الصفحة 45 طُبع const خطأً مكان const ، أي مقدار ثابت.

و«هي أخذ أشكال حفظ الطاقة»، كما في الكتاب: $\rho g z$ هي الطاقة الكامنة الثقالية لوحدة الحجم، و $\frac{1}{2}\rho v^2$ الطاقة الحركية لوحدة الحجم، فلا بد أن يكون الضغط P أيضاً طاقةً لوحدة الحجم، حتى تتناسق الواحدات في المعادلة. ونتحقق من ذلك بواحدات الضغط:

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N.m}^{-2} \\ = 1 \text{ N.m.m}^{-3} = 1 \text{ J.m}^{-3}$$

انتبه: للمعادلة شروط: سائلٌ مثالي، جريانه مستقر، ونقطتان من خط الانسياب نفسه. وفي السائل اللزج تضيع طاقةً بالاحتكاك الداخلي، فلا يبقى المجموع ثابتاً.

ما واحدة المقدار $\frac{1}{2}\rho v^2$ في الجملة الدولية؟

كيف أبدأ؟ عوض الواحدات: kg.m^{-3} للكتلة الحجمية و m.s^{-1} للسرعة، ثم قارن بوحدة الضغط.

Pa (أ)

J (ب)

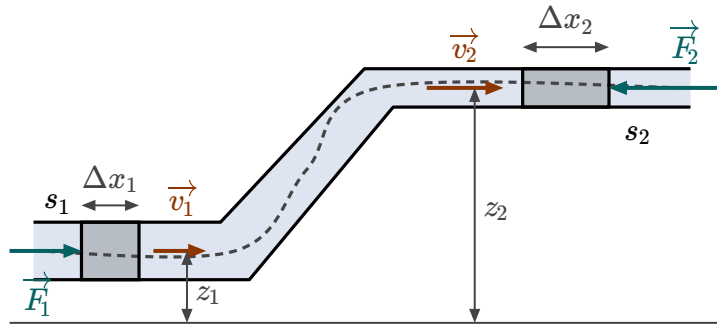
N (ج)

أ. نعم: $\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2} = \text{kg.m}^{-3} \times \text{m}^2.\text{s}^{-2}$ ، وهي N.m^{-2} ، أي Pa، وهي أيضاً J.m^{-3} : طاقةً لوحدة الحجم.

استنتاج معادلة برنولي

يستنتج الكتاب المعادلة في الصفحتين 44 و 45 من العمل. ولم يُطلب هذا الاستنتاج في أوراق امتحان البكالوريا التي قرأناها من 2016 إلى 2026، فالمطلوب فيها تطبيق المعادلة. لكنّه يبيّن من أين جاءت، فنتبعه، ونكمل الخطوات التي يختصرها الكتاب.

كمية صغيرة من السائل تمرّ بين مقطعين: عند الأول مساحة المقطع s_1 والضغط P_1 والسرعة v_1 والارتفاع z_1 عن مستوٍ مرجعي، وعند الثاني s_2 و P_2 و v_2 و z_2 . والعمل الكليّ المبذول لتحريكها من المقطع الأول إلى الثاني «يساوي مجموع عمل قوّة الثقل، وعمل قوّة ضغط السائل».



قوة الضغط $\vec{F}_1$ لها جهة الجريان عند s_1 ، و $\vec{F}_2$ تعاكسها عند s_2 . الجزءان المظلّلان لهما الحجم نفسه ΔV ، والخط المتقطع خط أنسياب. عن الكتاب، الصفحة 44.

نكتب أعمال القوى الثلاث كما في الكتاب، ثم نساوي مجموعها بتغير الطاقة الحركية.

$$W_{\text{total}} = W_w + W_1 + W_2$$

1. عمل قوة الثقل ترتفع كتلة السائل m من z_1 إلى z_2 ، فعمل ثقلها سالب:

$$W_w = -m g (z_2 - z_1)$$

2. عمل قوة الضغط عند s_1 F_1 لها جهة الجريان، وتنتقل نقطة تأثيرها Δx_1 في المدة Δt : عمل محرك موجب. و $F_1 = P_1 s_1$ ، و $\Delta x_1 s_1 = \Delta V$ حجم السائل الذي يعبر s_1 :

$$W_1 = F_1 \Delta x_1 = P_1 s_1 \Delta x_1$$

$$W_1 = P_1 \Delta V$$

3. عمل قوة الضغط عند s_2 F_2 تعاكس جهة الجريان: عمل مقاوم سالب. والحجم $s_2 \Delta x_2$ هو ΔV نفسه، «وذلك لأن السائل غير قابل للانضغاط»:

$$W_2 = -F_2 \Delta x_2 = -P_2 s_2 \Delta x_2$$

$$W_2 = -P_2 \Delta V$$

4. العمل الكلي يكتب الكتاب هنا «وبحسب مصونية الطاقة»، والخطوة في الحقيقة نظرية الطاقة الحركية التي طبّقناها على النّوّاس: العمل الكلي، وفيه عمل الثقل، يساوي تغير الطاقة الحركية:

$$-m g (z_2 - z_1) + P_1 \Delta V - P_2 \Delta V$$

$$= \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

5. **لواحدة الحجم** يعوّض الكتاب $m = \rho \Delta V$ ويكتب النتيجة مباشرة. والخطوة التي يختصرها من عندنا: نقسم الطرفين على ΔV ، ونجمع ما يخص كل نقطة في طرف:

$$\begin{aligned} R_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 \\ = R_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2 \end{aligned}$$

النقطتان أيّ نقطتين من خط الانسياب، فالمجموع واحد في كلّ نقطته:

$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z = \text{const}$$

الأنبوب الأفقيّ والسائل الساكن

حالة خاصة في الكتاب، الصفحة 45: إذا كان الأنبوب أفقيّاً فـ $z_1 = z_2$ ، ويختصر حدّ الارتفاع:

$$P_1 - P_2 = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2)$$

فإذا كانت $v_2 > v_1$ كان $P_1 > P_2$: هذا ما رأيناه عند النقطة b في النشاط الثاني.

وأول تطبيقات الكتاب «سكّون السوائل، ومعادلة المانومتر»: إذا كان السائل ساكناً في الأنبوب فـ $v_1 = v_2 = 0$ ، ونعوّض في معادلة برنولي:

$$\begin{aligned} P_1 - P_2 &= \rho g z_2 - \rho g z_1 \\ P_1 - P_2 &= \rho g (z_2 - z_1) \\ P_1 - P_2 &= \rho g h \end{aligned}$$

«وهذه معادلة المانومتر (قانون الضغط في الموائع الساكنة)». و $h = z_2 - z_1$ هنا، أي النقطة الثانية أعلى، فالنقطة الأعمق ضغطها أكبر.

انتبه: 📌 الحرف h يتغيّر معناه في الصفحة نفسها: في معادلة المانومتر $h = z_2 - z_1$ ، وفي نظرية تورشيللي بعدها $h = z_1 - z_2$. انظر في كلّ مرّة أيّ النقطتين أعلى.

نقطتان في ماء ساكن، النقطة (2) أعلى من النقطة (1) بـ 2 m . ما $P_1 - P_2$ ؟ نأخذ $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ و $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$

| كيف أبدأ؟ أيّ النقطتين أعمق؟ ثمّ عوّض في معادلة المانومتر.

$$P_1 - P_2 = -2 \times 10^4 \text{ Pa} \quad (\text{أ})$$

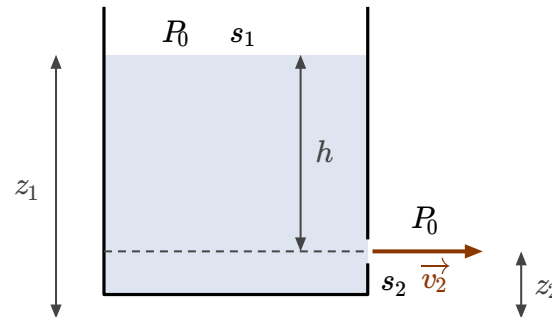
$$P_1 - P_2 = 2 \times 10^4 \text{ Pa} \quad (\text{ب})$$

$$P_1 - P_2 = 2 \times 10^3 \text{ Pa} \quad (\text{ج})$$

ب. نعم: $P_1 - P_2 = \rho g (z_2 - z_1)$ ، أي $2 \times 10 \times 1000$ ، والنقطة الأعمق ضغطها أكبر.

نظرية تورشيللي

خزانٌ يحتوي سائلًا كتلته الحجمية ρ ، مساحة سطحه s_1 كبيرة بالنسبة إلى فتحةٍ جانبيةٍ مساحة مقطعها s_2 صغيرة، تقع قرب قعره وعلى عمق $z_1 - z_2 = h$ من السطح الحرّ. يسأل الكتاب، الصفحة 45: «ما السرعة التي يخرج بها السائل من الفتحة الجانبية؟»



السطح الحرّ والفتحة كلاهما تحت الضغط الجوي P_0 ، و h عمق الفتحة تحت السطح الحرّ. عن الكتاب، الصفحة 45.

نطبّق معادلة برنولي بين السطح الحرّ (1) والفتحة (2)، بالخطوات التي يطلبها سلّم تصحيح الدورة الثانية 2018.

$$v_2 = ?$$

1. معادلة برنولي بين النقطتين (1) و(2):

$$\begin{aligned} P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 \\ = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2 \end{aligned}$$

2. **الضغطان** السطح مفتوح والفتحة معرّضة للهواء، فكلاهما تحت الضغط الجوي النظامي: $P_1 = P_2 = P_0$. يختصر الضغطان، ونقسم على ρ :

$$\frac{1}{2}v_1^2 + g z_1 = \frac{1}{2}v_2^2 + g z_2$$

3. **سرعة السطح** «وبما أنّ السرعة v_1 مهملة بالنسبة للسرعة v_2 نأخذ $v_1 \approx 0$ ». والسبب من معادلة الاستمرارية:

$$v_1 = \frac{s_2}{s_1} v_2 \text{ ، و } s_1 \text{ أكبر بكثير من } s_2 :$$

$$g z_1 = \frac{1}{2}v_2^2 + g z_2$$

4. **السرعة** ومع $z_1 - z_2 = h$:

$$v_2^2 = 2g(z_1 - z_2)$$

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

«إنّ سرعة خروج السائل تساوي السرعة التي يسقط بها جسم سائل سقوطاً حراً من ارتفاع h »، وتنطبق على أيّ فتحة في الوعاء، في قعره أو في جداره الجانبي. الكتاب، الصفحة 46.

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

انتبه: اكتب رمز العمق كما أعطاه السؤال. في امتحان الدورة الثانية 2018 سُمّي العمق z ، والجواب $v_2 = \sqrt{2gz}$ ، ويخسر درجتين من يكتب h مكانه. وعلّل $P_1 = P_2 = P_0$ و $v_1 \approx 0$ ، فكلّ منهما خطوة في السلم.

في جدار خزانٍ مفتوحٍ واسعٍ فتحةً صغيرة على عمق 0.8 m تحت سطح الماء الحرّ. ما سرعة خروج الماء منها؟ نأخذ $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

كيف أبدأ؟ طبّق نظرية تورشيللي، و h عمق الفتحة تحت السطح الحرّ.

(أ) $v_2 = 2\sqrt{2} \text{ m.s}^{-1}$

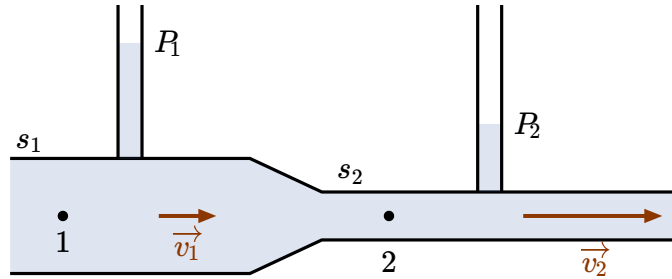
(ب) $v_2 = 4 \text{ m.s}^{-1}$

(ج) $v_2 = 16 \text{ m.s}^{-1}$

ب. نعم: $v_2 = \sqrt{2gh}$ ، أي $\sqrt{2 \times 10 \times 0.8} = \sqrt{16}$ ، ف $v_2 = 4 \text{ m.s}^{-1}$.

أنبوب فنتوري

أنبوب فنتوري، كما في الكتاب، الصفحة 46: أنبوب مساحة مقطعه s_1 يجري فيه سائل بسرعة v_1 في منطقة ضغطها P_1 ، ثم يصل إلى اختناق مساحته s_2 . ويُستعمل لمعرفة فرق الضغط بين الجذع الرئيس والاختناق.



النقطتان (1) و(2) في المستوي الأفقي نفسه، والسائل في الأنبوب الشاقولي فوق الاختناق أدنى. الرسم من عندنا على شكل الكتاب، الصفحة 46، وفيه جهازا قياس ضغط.

نثبت أن الضغط في الجذع الرئيس أكبر منه في الاختناق، بالخطوات التي يطلبها سَلَم تصحيح الدورة الأولى 2024.

$$P_1 > P_2$$

1. معادلة برنولي بين النقطتين (1) و(2)، وهما في المستوي الأفقي نفسه، ف $z_1 = z_2$:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2$$

2. معادلة الاستمرارية $s_1 v_1 = s_2 v_2$ ، ف $v_2 = \frac{s_1}{s_2} v_1$. نعوض، وهي الخطوة التي يختصرها الكتاب:

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho \left[\left(\frac{s_1}{s_2} \right)^2 - 1 \right] v_1^2$$

3. المقارنة لدينا $s_1 > s_2$ ، فما بين القوسين موجب:

$$P_1 > P_2$$

«أي أن الضغط في الاختناق أقل من الضغط في الجذع الرئيس للأنبوب.» الكتاب، الصفحة 46.

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho \left[\left(\frac{s_1}{s_2} \right)^2 - 1 \right] v_1^2$$

ويُستفاد من هذا في الطب، كما في الكتاب: قد تتناقص مساحة مقطع شريانٍ في منطقةٍ ما نتيجة تراكم الدهون والشحوم، فيتناقص ضغط الدم في المقطع المتضيق عن قيمته الطبيعية اللازمة لمقاومة الضغوط الخارجية. ومن هذا التطبيق انطلق السؤال الثالث في الدورة الأولى 2024، وطلب الإثبات أعلاه.

في أنبوب فنتوري أفقي $\frac{s_1}{s_2} = 3$ ، والماء يجري في الجذع الرئيس بسرعة $v_1 = 2 \text{ m.s}^{-1}$. ما فرق الضغط $P_1 - P_2$ ؟ نأخذ $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$.

| كيف أبدأ؟ عوّض في علاقة فرق الضغط، وانتبه إلى ما يُربّع وإلى الواحد المطروح.

$$P_1 - P_2 = 1.6 \times 10^4 \text{ Pa} \quad (\text{أ})$$

$$P_1 - P_2 = 1.8 \times 10^4 \text{ Pa} \quad (\text{ب})$$

$$P_1 - P_2 = 4 \times 10^3 \text{ Pa} \quad (\text{ج})$$

أ. نعم: $\frac{1}{2} \times 1000 \times (9 - 1) \times 4$ ، أي 16000 Pa .

مثالٌ محلول: مضخة ترفع الماء

لا يحلّ الكتاب في هذا الدرس مثالاً رقمياً، فهذا مثالٌ من عندنا على مسألة المضخة، وقد جاءت في امتحان 2020، النظام القديم، بمعدّل الضخّ وسرعة الخروج ثمّ الضغط، وفي الدورة الثانية 2023 بالسرعتين ثمّ فرق الضغط ثمّ العمل.

مثالٌ من عندنا: ترفع مضخة الماء من خزانٍ أرضيٍّ عبر أنبوبٍ مساحة مقطع فتحته $s_1 = 20 \text{ cm}^2$ إلى خزانٍ على سطح بناء، تصبّ فيه فتحةٌ مساحة مقطعها $s_2 = 10 \text{ cm}^2$ ، بمعدّل تدفقٍ حجميٍّ $Q' = 0.004 \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$. الارتفاع بين الفتحتين 12 m ، والضغط عند الفتحة العليا $P_2 = 10^5 \text{ Pa}$. احسب سرعة الماء عند الفتحتين، ثمّ الضغط P_1 عند الفتحة السفلى، ثمّ العمل الكليّ المبذول على 40 L من الماء بين الفتحتين. نأخذ $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ و $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

$$Q' = s_1 v_1 = s_2 v_2$$

1. السرعتان نحوّل المقطعين: $s_1 = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ و $s_2 = 10^{-3} \text{ m}^2$:

$$v_1 = \frac{Q'}{s_1} = \frac{0.004}{2 \times 10^{-3}} = 2 \text{ m.s}^{-1}$$

$$v_2 = \frac{Q'}{s_2} = \frac{0.004}{10^{-3}} = 4 \text{ m.s}^{-1}$$

2. معادلة برنولي بين الفتحتين، و $z_2 - z_1 = 12 \text{ m}$:

$$P_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho (v_2^2 - v_1^2) + \rho g (z_2 - z_1)$$

3. الضغط عند الفتحة السفلى نعوض:

$$\begin{aligned} P_1 &= 10^5 + 500 \times 12 \\ &\quad + 1000 \times 10 \times 12 \\ P_1 &= 10^5 + 6000 + 120000 \\ P_1 &= 2.26 \times 10^5 \text{ Pa} \end{aligned}$$

4. العمل الكلي كتلة 40 L من الماء $m = \rho \Delta V = 1000 \times 0.04 = 40 \text{ kg}$. والعمل الكلي المبذول عليها يساوي تغيّر طاقتها الحركية، كما في استنتاج برنولي:

$$\begin{aligned} W_{\text{total}} &= \frac{1}{2}m (v_2^2 - v_1^2) \\ W_{\text{total}} &= 20 \times 12 = 240 \text{ J} \end{aligned}$$

في مسائل المضخة: السرعتان من معدّل التدفق، ثمّ الضغط من معادلة برنولي، ثمّ العمل الكلي من تغيّر الطاقة الحركية:

$$W_{\text{total}} = \Delta E_k$$

وهكذا حسب سلّم تصحيح الدورة الثانية 2023 «العمل الميكانيكي اللازم لضخّ» الماء: العمل الكلي يساوي تغيّر الطاقة الحركية. وعمل الثقل محسوب فيه بالسالب، فالعمل الذي تبذله قوّة الضغط وحدهما أكبر بكثير، لأنّ الماء يرتفع. اقرأ السؤال: إن طلب العمل الكلي فهو ΔE_k .

متى نطبّق معادلة برنولي كما في الكتاب؟

| كيف أبدأ؟ عُد إلى نصّ النظرية، وإلى ميزات السائل المثالي في الدرس السابق.

(أ) على أيّ سائل، لأنّها أحد أشكال حفظ الطاقة.

(ب) على سائل ساكن فقط.

(ج) على سائل مثالي جريانه مستقرّ، بين نقطتين من خطّ الانسياب نفسه.

ج. نعم: هذا نصّ النظرية، «عند أيّ نقطة من نقاط خطّ الانسياب لسائل جريانه مستقرّ»، والسائل مثالي.

المصدر: الفيزياء، الصفحات 43 إلى 46 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.