



الفيزياء، البكالوريا، الفرع العلمي

## الحركة التوافقية البسيطة والنّواس المرن

قوة الإرجاع، والمعادلة التفاضلية، والدور الخاص للنّواس المرن

الحركة والتحرك . الوحدة 1 . الدرس 1 (1 من 2)

يفتح الكتاب هذه الوحدة بأن كثيراً من الآلات الصناعية تعتمد في عملها على الحركة التوافقية البسيطة. نتعرف في هذا الدرس هذه الحركة: نراها أولاً في مسقط نقطة تدور حركةً دائريةً منتظمة، ثم في جسمٍ معلقٍ بنابض. ومن قانون نيوتن الثاني نصل خطوةً خطوةً إلى معادلتها التفاضلية، ثم إلى علاقة الدور الخاص، وهو برهانٌ طلب في امتحانات البكالوريا بنصه تقريباً.

### الحركة الاهتزازية

في الأنشطة الثلاثة الأولى من الكتاب ثلاث حركات. منشأ لقطع المعادن يروح وبجيء، يحركه محركٌ كهربائيٌ يدور بسرعةٍ زاويةٍ ثابتة. وكرةٌ صغيرةٌ مثبتةٌ على قرصٍ يدور، يُسلط عليها ضوءٌ أفقي، فيصعد خيالها وينزل على مستويٍ شاقولي. وكرةٌ معدنيةٌ تُترك على طرف وعاءٍ أملس مقعر، فتذهب وتعود حول النقطة  $A$  في قعره.

يجمع المنشأ والخيال والكرة أن كلّاً منها يتحرك إلى جانبي نقطة ثابتة، ويمرّ بها ثم يتجاوزها ثم يعود. ولا يدخل في ذلك القرص نفسه ولا البكرة: هما يدوران.

**تذكّر:** «الحركة الاهتزازية: حركة جسمٍ يهتزُّ إلى جانبي نقطة ثابتة تُسمى مركز الاهتزاز.» ثم يضيف الكتاب أن حركة اهتزاز جسمٍ صلبٍ معلقٍ بنابضٍ مرنٍ حلقائه متباعدة هي أوضح مثالٍ على الحركة التوافقية البسيطة، ويُدعى هذا النّواس المرن. الكتاب، الصفحة 4.

أيّ الحركات الآتية حركةٌ اهتزازية؟

**| كيف أبدأ؟** التعريف يشترط نقطة ثابتة يتحرك الجسم إلى جانبيها. ابحث في كلّ حركةٍ عن هذه النقطة.

(أ) حركة النقطة  $B$  على البكرة في النشاط (1).

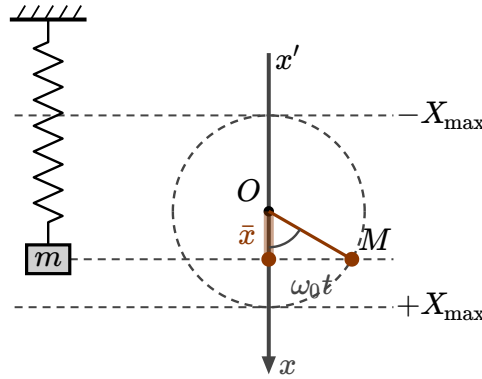
(ب) حركة خيال الكرة على المستوي الشاقولي في النشاط (2).

(ج) حركة الكرة على القرص نفسه في النشاط (2).

**ب. نعم.** هذا ما يستنتجه الكتاب نفسه: حركة الخيال حركةٌ اهتزازيةٌ إلى جانبي نقطة ثابتة تُسمى مركز الاهتزاز.

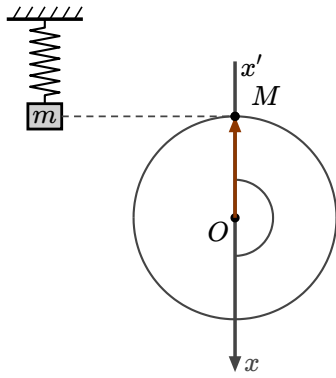
### من الدوران إلى الاهتزاز

في النشاط (4) تدور نقطة مادية  $M$  حركة دائرية منتظمة سرعتها الزاوية  $\omega_0$  ، وشعاع موضعها  $\overrightarrow{OM}$  طويلته  $X_{\max}$  . نُسقط  $M$  على المحور  $\overrightarrow{x'x}$  ، وهو في الشكل شاقوليٌّ موجّه نحو الأسفل كما في الكتاب. يسمّي الكتاب هذا الربط تمثيل فرينل.

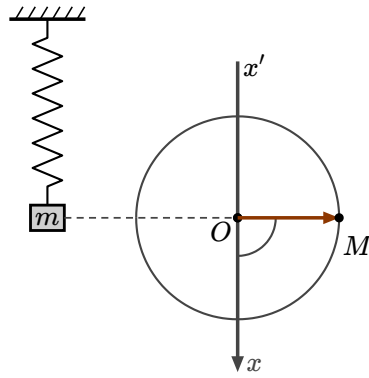


مطال الحركة  $\bar{x}$  هو مسقط الشعاع  $\overrightarrow{OM}$  على المحور  $\overrightarrow{x'x}$  ، والجسم المعلق بالنابض يتحرّك معه على الارتفاع نفسه. عن الكتاب، الصفحة 5.

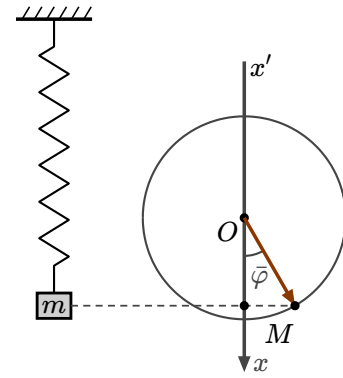
تتبع الآن المسقط في أربع لحظات. الزاوية بين الشعاع والمحور تكبر بانتظام، أمّا المسقط فيصعد وينزل بين  $-X_{\max}$  و  $+X_{\max}$  ، تماماً كالجسم على النابض.



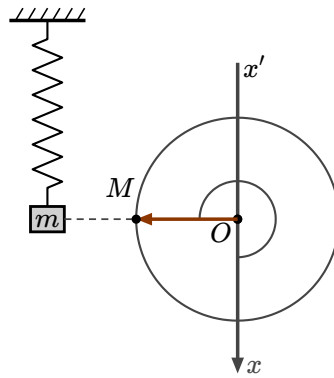
3.  $t_2$  : حين يتجه الشعاع نحو  $x'$  يبلغ المسقط أبعد موضع له فوق  $O$  :  
 $\bar{x} = -X_{\max}$



2.  $t_1$  : تدور  $M$  بسرعة زاوية ثابتة  $\omega_0$  .  
 حين يعامد الشعاع المحور يقع المسقط في  $O$  ، فالمطال  $\bar{x} = 0$  .



1.  $t = 0$  : الزاوية بين الشعاع  $\overrightarrow{OM}$  والمحور  $\overrightarrow{x'x}$  هي الطور الابتدائي  $\bar{\varphi}$  ، ومسقط  $M$  على المحور في مستوى الجسم  $m$  .



4.  $t_3$  : ثم يعود المسقط إلى  $O$  . في كل لحظة  $\bar{x} = X_{\max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$  ، وهذه حركة الجسم  $m$  على النابض.

نقطة تدور حركة دائرية منتظمة، ومسقطها على المحور  $\overrightarrow{x'x}$  يتحرك كالجسم المعلق بالنابض. عن الكتاب، الصفحة 5، النشاط (4).

## أستنتج

$\vec{OM}$  الشعاع بين الشعاع  $\vec{OM}$  والمحور  $\vec{x'x}$  في اللحظة  $t = 0$  .

$\vec{OM}$  الشعاع بين الشعاع  $\vec{OM}$  والمحور  $\vec{x'x}$  في اللحظة  $t$  .

$X_{\max}$  سعة الحركة: طول الشعاع  $\vec{OM}$  الثابتة عند الدوران.

$\omega_0$  النبض الخاص بالحركة: يقابل السرعة الزاوية الثابتة التي تدور بها النقطة  $M$  .

$\vec{OM}$  الشعاع  $\vec{OM}$  على المحور  $\vec{x'x}$  ، وهو متغيّر بتغيّر الزمن.

$$\frac{\bar{x}}{X_{\max}} = \cos(\omega_0 t + \varphi) \text{ النسبة.}$$

$\bar{x} = X_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$  التابع الزمني لحركة المسقط تابعٌ جيبي، لذلك تُسمّى الحركة جيبيّةً انسحابيّةً (توافقية بسيطة).

الكتاب، الصفحة 5

متى يكون مطال المسقط  $\bar{x} = 0$  ؟

**كيف أبداً؟** استعمل النسبة من الكتاب: متى ينعدم الكسر  $\frac{\bar{x}}{X_{\max}}$  ، وماذا يعني ذلك للزاوية بين الشعاع والمحور؟

(أ) حين ينطبق الشعاع  $\vec{OM}$  على المحور  $\vec{x'x}$  .

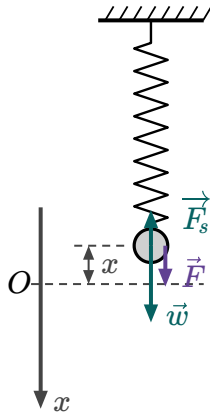
(ب) حين تنعدم الزاوية  $\omega_0 t + \varphi$  .

(ج) حين يعامد الشعاع  $\vec{OM}$  المحور  $\vec{x'x}$  .

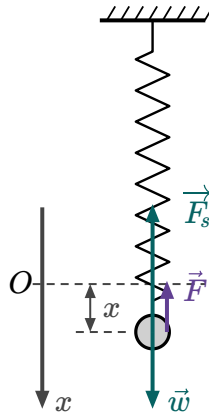
**ج.** نعم. حين تكون الزاوية قائمةً ينعدم جيب تمامها، فيقع المسقط في  $O$  ، مركز الاهتزاز.

## النّواس المرن في حالة السكون

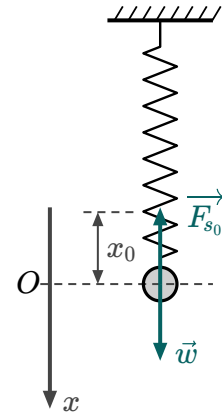
النّواس المرن جسمٌ صلبٌ معلقٌ بنابضٍ مرنٍ مهمل الكتلة حلقاته متباعدة. في النشاط (5) نعلّق به كرةً كتلتها  $m$  فيستطيل النابض، ثمّ نشدّها نحو الأسفل ونتركها. تابع الحالات الثلاث في الصور، والقوى مرسومةً بمقياسٍ واحد.



**3. الحالة C :** نترك الكرة فتهتز. فوق  $O$  يصغر توتر النابض عن الثقل، فتتجه المحصلة نحو الأسفل، نحو  $O$  أيضاً.



**2. الحالة B :** نشد الكرة نحو الأسفل مسافة  $x$  : يزداد توتر النابض، فتتجه المحصلة  $\vec{F}$  نحو الأعلى، نحو مركز الاهتزاز  $O$ .



**1. الحالة A :** الكرة ساكنة في موضع التوازن: استطال النابض مسافة  $x_0$  ، وقوة توتره  $\vec{F}_{s_0}$  تعادل الثقل  $\vec{w}$  .

النّوَّاس المرن في الحالات  $A$  و  $B$  و  $C$  من النشاط (5)، والقوى مرسومة بمقياس واحد، عن الكتاب، الصفحة 6.

في الحالة  $A$  الكرة ساكنة، وتؤثر فيها قوتان: ثقلها  $\vec{w}$  وقوة توتر النابض  $\vec{F}_{s_0}$  . ولأنّها ساكنة فمحصلتهما معدومة:  $\vec{w} + \vec{F}_{s_0} = \vec{0}$  . وبالإسقاط على محور شاقوليّ موجّه نحو الأسفل نجد  $w - F_{s_0} = 0$  ، أي  $w = F_{s_0}$  . والنابض يستطيل  $x_0$  بالقوة  $\vec{F}_{s_0}$  التي تؤثر فيه، وشدتها  $F'_{s_0} = F_{s_0} = k x_0$  .

### حالة السكون

بالتعويض. يُسمّى المقدار  $x_0$  الاستطالة السكونيّة.

$$x_0 = \frac{m g}{k} \quad \text{لأن } w = m g . \text{ بهذه الصورة يجمعها الكتاب في «تعلمت»، الصفحة 12.}$$

الكتاب، الصفحة 6

**انتبه:** الاستطالة السكونيّة  $x_0$  ليست سعة الاهتزاز. هي تحدّد موضع التوازن، أي مركز الاهتزاز، أمّا السعة  $X_{\max}$  فهي أبعد ما يبتعده الجسم عن هذا المركز. فإذا شددناه عن موضع التوازن ثم تركناه دون سرعة ابتدائية، كانت السعة هي مسافة هذا الشد.

كرة كتلتها  $m = 0.2 \text{ kg}$  معلقة بنابضٍ ثابت صلابته  $k = 20 \text{ N.m}^{-1}$  ، وهي ساكنة. ما الاستطالة السكونية للنابض؟ نأخذ  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$  .

| كيف أبدأ؟ في السكون تتعادل قوتان. اكتب شدة كلٍّ منهما بدلالة المعطيات، ثمّ ساو بينهما.

$$x_0 = 0.1 \text{ m} \quad (\text{أ})$$

$$x_0 = 10 \text{ m} \quad (\text{ب})$$

$$x_0 = 0.01 \text{ m} \quad (\text{ج})$$

$$\text{أ. نعم: } m g = k x_0 \text{ ، ف } x_0 = \frac{0.2 \times 10}{20} = 0.1 \text{ m}$$

## قوة الإرجاع

في الحالة  $B$  نشد الكرة نحو الأسفل فيصير لها مطال  $\bar{x}$  عن موضع التوازن، ثم نتركها في الحالة  $C$  . القوتان المؤثرتان في مركز عطالتها ما زالتا الثقل  $\vec{w}$  وقوة توتر النابض  $\vec{F}_s$  ، لكنّ محصلتهما لم تعد معدومة. ما يلي هو حساب الكتاب في الصفحتين 6 و7، وهو نفسه ما طلبه امتحان الدورة الأولى 2024 خطوة خطوة.

من امتحان الدورة الأولى 2024، بعد حالة التوازن: نشد الكرة نحو الأسفل مسافة مناسبة ضمن حدود مرونة النابض، ونتركها دون سرعة ابتدائية. أثبت أنّ محصلة القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الكرة في كلّ لحظة هي قوة إرجاع تُعطى بالعلاقة:

$$\vec{F} = -k \bar{x}$$

1. في حالة السكون الكرة متوازنة، فبالإسقاط على المحور الشاقوليّ الموجّه نحو الأسفل وبالتعويض  $F_{s_0} = k x_0$  :

$$w = k x_0 \quad (1)$$

2. قانون نيوتن الثاني بعد الشدّ تتحرّك الكرة، فمحصلة القوى المؤثرة في مركز عطالتها تساوي  $m \vec{a}$  :

$$\vec{w} + \vec{F}_s = m \vec{a}$$

3. الإسقاط على المحور الشاقوليّ الموجّه نحو الأسفل:

$$w - F_s = m \bar{a}$$

4. توتر النابض استطالة النابض الآن  $\bar{x} + x_0$  ، فشدة قوة توتره:

$$F_s = k (\bar{x} + x_0)$$

## 5. التعويض نعوض في معادلة الإسقاط:

$$w - k \bar{x} - k x_0 = m \bar{a}$$

6. النتيجة ومن (1) يُختصر  $w$  مع  $k x_0$  ، والمحصلة هي  $\bar{F} = m \bar{a}$  :

$$\bar{F} = m \bar{a} = -k \bar{x}$$

الإشارة السالبة هي ما يجعلها قوة إرجاع: أينما كان الجسم، تشير المحصلة نحو مركز الاهتزاز.

$$\bar{F} = -k \bar{x}$$

## نتيجة

$\bar{F} = -k \bar{x}$  إنّ محصلة القوى الخارجيّة المؤثرة في مركز عطالة الجسم في كلّ لحظة هي قوة إرجاعٍ لآئها تُعيد الجسم إلى مركز الاهتزاز دوماً، وهي تتناسب طردياً مع المطال  $\bar{x}$  ، وتعاكسه بالإشارة.

الكتاب، الصفحة 7

**انتبه:** لا ندخل الثقل في قوة الإرجاع مرّة ثانية. هو موجود في الحساب، لكنّه يُختصر مع  $k x_0$  لأنّ  $w = k x_0$  ، ولهذا لا يظهر  $m g$  في  $\bar{F} = -k \bar{x}$  .

المحور الشاقوليّ موجّه نحو الأسفل، ومطال الجسم  $\bar{x} = -2 \text{ cm}$  ، وثابت صلابة النابض  $k = 50 \text{ N.m}^{-1}$  . ما قيمة قوة الإرجاع  $\bar{F}$  ؟

**| كيف أبدأ؟** حوّل المطال أولاً إلى الواحدة الدوليّة، ثمّ عوّض في علاقة قوة الإرجاع بإشارتها كاملة.

$$\bar{F} = -1 \text{ N} \quad (\text{أ})$$

$$\bar{F} = +100 \text{ N} \quad (\text{ب})$$

$$\bar{F} = +1 \text{ N} \quad (\text{ج})$$

ج. نعم:  $\bar{F} = -50 \times (-0.02) = +1 \text{ N}$  . الجسم فوق مركز الاهتزاز، والقوة تشير نحو الأسفل، نحو المركز.

## طبيعة الحركة: المعادلة التفاضليّة

يتغيّر مطال الجسم زيادةً ونقصاناً بمرور الزمن، فما طبيعة هذه الحركة؟ هكذا يسأل الكتاب في الصفحة 7. محصلة القوى المؤثرة

في مركز عطالة الجسم  $\bar{F} = m \bar{a} = -k \bar{x}$  ، ومنها  $\bar{a} = -\frac{k}{m} \bar{x}$  . والتسارع هو المشتقّ الثاني للمطال بالنسبة

للزمن، فنكتب:

$$(\bar{x})''_t = -\frac{k}{m} \bar{x} \quad (1)$$

وهي معادلة تفاضليّة من المرتبة الثانية. البرهان التالي، أنّ حلّها جيبيّ، طُلب للنّوَّاس المرن في امتحانات البكالوريا في 2019 و2022 و2026، وطُلب مثله لنّوَّاس الفتل والنّوَّاس الثّقليّ. الخطوات أدناه بترتيب سلّم تصحيح امتحان 2026 في دمشق.

انطلاقاً من المعادلة التفاضليّة (1)، برهن أنّ حركة الجسم حركة جيبيّة انسحابيّة، ثمّ استنتج علاقة الدور الخاصّ.

$$(\bar{x})''_t = -\frac{k}{m} \bar{x}$$

**1. الحلّ الجيبيّ** هذه معادلة تفاضليّة من المرتبة الثانية بالنسبة للزمن، تقبل حلاً من الشكل الجيبيّ:

$$\bar{x} = X_{\max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi}) \quad (2)$$

**2. المشتقّ الأوّل** نشتقّ مرّةً بالنسبة للزمن، فنحصل على السرعة:

$$(\bar{x})'_t = \bar{v} = -\omega_0 X_{\max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

**3. المشتقّ الثاني** ونشتقّ مرّةً ثانية، فنحصل على التسارع. في سلّم تصحيح 2026 يخسر من يُهمل الإشارة السالبة علامة هذه المعادلة.

$$(\bar{x})''_t = \bar{a} = -\omega_0^2 X_{\max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

**4. بدلالة المطال** نعوّض (2) في المشتقّ الثاني:

$$(\bar{x})''_t = -\omega_0^2 \bar{x} \quad (3)$$

**5. المطابقة** بالمطابقة بين (3) والمعادلة التفاضليّة الأصليّة (1):

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

**6. النبض الخاصّ** وبالجذر. والنتيجة موجبة، وهذا محقّق لأنّ  $k$  و  $m$  موجبان:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$$

**7. الدور الخاصّ** لكنّ  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$  ، فبالمساواة ثمّ بقلب الطرفين:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

الحلّ الجيبيّ يحقّق المعادلة بشرط واحد على النبض، وهو محقّق دائماً. فحركة النّوَّاس المرن جيبيّة انسحابيّة، أي توافقية بسيطة.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

**انتبه:** أهم إشارة في هذا الدرس هي الإشارة السالبة، في قوّة الإرجاع وفي المشتقّين معاً. بدونها تصير المعادلة

$$(\bar{x})''_t = +\frac{k}{m} \bar{x} \text{ ، وحلّها لا يهتزّ بل يبتعد عن المركز.}$$

نابض ثابت صلابته  $k = 40 \text{ N.m}^{-1}$  يحمل جسماً كتلته  $m = 1 \text{ kg}$  . ما النبض الخاصّ للحركة؟ نأخذ  $\pi^2 = 10$  .

**كيف أبدأ؟** اكتب علاقة النبض الخاصّ التي خرجت من المطابقة، ثمّ اكتب 40 على صورة  $4 \times 10$  .

(أ) 1 s

(ب)  $\omega_0 = 2\pi \text{ rad.s}^{-1}$

(ج)  $\omega_0 = 40 \text{ rad.s}^{-1}$

ب. نعم:  $\omega_0 = \sqrt{\frac{40}{1}} = \sqrt{4 \times 10} = 2\sqrt{10} = 2\pi \text{ rad.s}^{-1}$  أي  $\omega_0 = 2\sqrt{10} = 2\pi \text{ rad.s}^{-1}$  .

## الدور الخاصّ

### نتيجة

( $\bar{x} = X_{\max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$  الشكل العامّ للتابع الزمنيّ لمطال النّوَّاس المرن.

$\bar{x}$  المطال، أو موضع الجسم، في اللحظة  $t$  ، ويقدر بالمتر m .

$X_{\max}$  سعة الحركة، وتقدر بالمتر m .

$\omega_0$  النبض الخاصّ للحركة، ويقدر بـ  $\text{rad.s}^{-1}$  .

$\bar{\varphi} + \omega_0 t$  طور الحركة في اللحظة  $t$  .

$\bar{\varphi}$  الطور الابتدائيّ في اللحظة  $t = 0$  ، ويقدر بالراديان rad .

الكتاب، الصفحة 8

**تذكّر:** ندعو كلاً من  $X_{\max}$  و  $\omega_0$  و  $\bar{\varphi}$  ثوابت الحركة. الكتاب، الصفحة 8.

الدور الخاص  $T_0$  هو مدّة هزّة كاملة: يعود بعدها الجسم إلى الموضع نفسه، متحرّكاً في الاتجاه نفسه. يجمع الكتاب العلاقتين  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  و  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$  ، وهي الخطوة الأخيرة من البرهان السابق.

### علاقة الدور الخاص

$$\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ بالمساواة.}$$

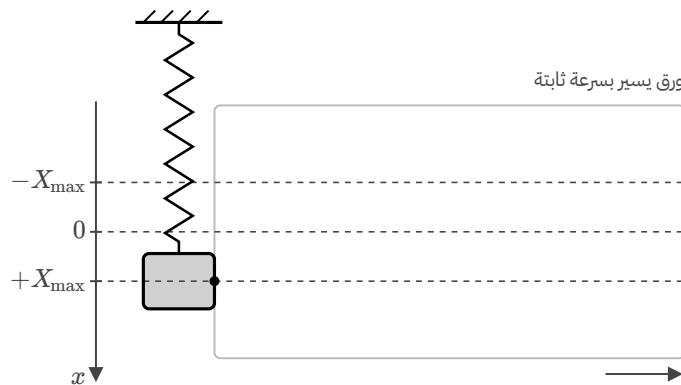
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \text{ علاقة الدور الخاص للنّوَّاس المرن غير المتخامد، ويقدر بالثانية } s.$$

الكتاب، الصفحة 8

**تذكّر:** من هذه العلاقة يستنتج الكتاب أنّ الدور الخاص: لا يتعلّق بسعة الاهتزاز  $X_{\max}$  ، ويتناسب طردياً مع الجذر التربيعي لكتلة الجسم المهتز  $m$  ، ويتناسب عكساً مع الجذر التربيعي لثابت صلابة النابض  $k$  .

**انتبه:** اكتب الدليل 0 دائماً:  $\omega_0$  و  $T_0$  ، لا  $\omega$  و  $T$  . في سلاسل التصحيح تُخصم درجة لمن يكتب  $\omega$  مكان  $\omega_0$  أو  $T$  مكان  $T_0$  .

جرّب ذلك بنفسك. يرسم الجسم حركته على ورقٍ يسير بسرعة ثابتة كما في الكتاب، الصفحة 7، فيظهر الخطّ الجيبي. غير السعة وحدها، ثمّ اجعل الكتلة أربعة أضعافها، وقارن الدور في كلّ مرّة.



النّوَّاس المرن كما في الكتاب، الصفحة 7: يرسم الجسم حركته على ورق يسير بسرعة ثابتة. غير كتلة الجسم أو ثابت صلابة النابض أو سعة الاهتزاز، ثمّ قارن الدور الخاص.

نريد سعة الاهتزاز من 2 cm إلى 4 cm ، ونُبقي الجسم والنابض كما هما. كيف يتغيّر الدور الخاصّ؟

**كيف أبدأ؟** انظر أيّ المقادير يظهر في علاقة  $T_0$  ، وأيّها لا يظهر.

(أ) لا يتغيّر.

(ب) يتضاعف.

(ج) يكبر بالعامل  $\sqrt{2}$  .

أ. نعم.  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$  لا تحوي السعة، فالجسم يقطع مسافةً أطول بسرعةٍ أكبر في الزمن نفسه.

المصدر: الفيزياء، الصفحات 3 إلى 8 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.