الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

نهايات مهمّة تتعلّق بالتابع الأسّي

التابع الأسّي يغلب كلّ قوّة، وبهذه الجملة تُحلّ حالات عدم التعيين

التابع الأسّي . الوحدة 6 . الدرس 4

بسيطة

ما الذي يحدث حين يتسابق x^{100} مع e^x ؟ الجواب في هذا الدرس، وهو أنّ التابع الأسّي يسبق كلّ قوّةٍ مهما علا أُسّها، ولو بعد حين. من هذه الجملة الواحدة تُحلّ كلّ حالات عدم التعيين التي تخلط الأُسّي بكثير الحدود، وهي في الامتحان أكثر مما تظنّ. والدرس فيه شيءٌ يستحقّ أن تعرفه قبل أن تبدأ: التابع الذي يدرسه الكتاب في مثاله الكبير، $f(x)=e^{-x}+x-2$ ، هو بعينه التابع الذي جاء في مسألة دورة 2026 بمئة درجة.

الأُسّي يغلب كلّ قوّة

لنطرح السؤال بدقّة. عند x كبيرة، يكبر x^n بلا حدّ، ويكبر e^x بلا حدّ أيضاً. فأيّهما يسبق؟ الجواب أنّ التابع الأسّي يسبق دائماً، ومهما اخترت n كبيرة. جرّب $n=100$ إن شئت: عند $x=10$ يكون x^{100} أكبر بكثير، لكنّ e^x يتجاوزه لاحقاً ولا يعود ينظر خلفه.

مبرهنة 7

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$ مهما كان العدد الطبيعي n . الأُسّي في البسط يغلب القوّة في المقام.

$\lim_{x\to+\infty}x^n e^{-x}=0$ الكتابة نفسها بالمقلوب، وهي الصورة التي تُستعمل أكثر.

الكتاب، الصفحة 177

تذكّر: الكتاب يعبّر عن هذا بعبارةٍ اصطلاحيّة: « x^n مهملٌ أمام e^x في جوار $+\infty$ ». وهذه العبارة هي المكان الوحيد الملوّن في نصّ الدرس كلّه، بالأزرق. لاحظ ما يعنيه ذلك: الأزرق هنا يعلّم مصطلحاً، لا شرطاً، على عكس الوحدة السابقة حيث كان يعلّم الشرط المنسيّ. والاتّجاه ليس متناظراً: القوّة هي المهملة، والأُسّي هو الغالب.

برهان الكتاب قصيرٌ وفيه حيلةٌ واحدة تستحقّ أن تُرى، لأنّها تفسّر من أين جاء $n+1$. أثبت أنّ $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$ عند كلّ عددٍ طبيعيّ n .

$$\frac{e^x}{x^n}$$

1. المتراجحة التي ينطلق منها رأينا في الدرس السابق أنّ الخطّ البياني للتابع الأسّي يقع فوق كلّ مماساته. وبتطبيق ذلك على المماس في النقطة $(0,\ 1)$ ، ومعادلته $y = x + 1$ ، نحصل على متراجحةٍ صحيحةٍ عند كلّ x . ولن نستعمل منها إلّا الصورة الأضعف عند $t \geq 0$.

$$e^x \geq x + 1$$
$$e^t \geq t \quad (t \geq 0)$$

2. تقسيم الأُسّ على $n+1$ هنا الحيلة. نكتب e^x قوّةً $n+1$ لعددٍ أُسّه $\frac{x}{n+1}$ ، وهذا مشروعٌ بقاعدة $(e^a)^p = e^{pa}$ من الدرس الثاني. ثمّ نطبّق المتراجحة على $t = \frac{x}{n+1}$ ، وهو موجبٌ لأنّ x موجبة.

$$e^x = \left(e^{\frac{x}{n+1}}\right)^{n+1} \geq \left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$$

3. القسمة على x^n نقسم الطرفين على x^n ، وهو موجبٌ تماماً فلا تنقلب المتراجحة. ولاحظ لماذا اخترنا $n+1$ بالذات: لأنّ القسمة تُبقي في البسط x واحدة، لا شيئاً ثابتاً.

$$\frac{e^x}{x^n} \geq \frac{x}{(n+1)^{n+1}}$$

4. المقارنة المقام $(n+1)^{n+1}$ عددٌ ثابت، فالطرف الأيمن يسعى إلى $+\infty$ مع x . وما هو أكبر من مقدارٍ يسعى إلى $+\infty$ يسعى إليه أيضاً.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(n+1)^{n+1}} = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

اثنتان تستحقّان الانتباه في هذا البرهان. الأولى أنّ اختيار $n+1$ ليس اعتباطاً، بل هو ما يترك x واحدةً في البسط بعد القسمة. والثانية أنّ الأساس كلّه، أي $e^x \geq x + 1$ ، لا يحمل رقم مبرهنةٍ في الكتاب: هو في فقرة «تكريساً للفهم» من الدرس السابق. من تخطّاها لا يملك أساس هذا البرهان.

$$e^x \geq x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

نتيجة 8

$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ مهما كان العدد الطبيعي n . عند $-\infty$ هذه المرّة، وبإشارة الأُسّ موجبة.

الكتاب، الصفحة 177

انتبه: برهان هذه النتيجة سطرٌ واحد في الكتاب: «يكفي إجراء تغييرٍ في المتحوّل $x \mapsto -x$ في المبرهنة السّابقة». وهو صحيح، لكنّه يمرّ على شيء بصمت: التعويض يُخرج عاملاً $(-1)^n$ ، لأنّ $(-t)^n = (-1)^n t^n$. العامل لا يغيّر النتيجة لأنّ الطرف الآخر صفر، لكنّه يوقف من يحاول التحقّق بنفسه. اكتبه ثمّ اشطبه.

انتبه: ولا تخلط بين الكتابتين، فالفرق في موضعين معاً. المبرهنة 7 عند $+\infty$ وأُسّها سالب: $x^n e^{-x} \to 0$. والنتيجة 8 عند $-\infty$ وأُسّها موجب: $x^n e^{x} \to 0$. الإشارة في الأُسّ وجهة النهاية يمشيان معاً دائماً؛ من غيّر واحدة ونسي الأخرى حصل على $+\infty$ بدل الصفر.

ما قيمة $\lim_{x\to-\infty} x^3 e^x$ ؟

أ) $-\infty$

ب) 0

ج) لا وجود لها، لأنّ الحدّين يسعيان في اتّجاهين متعاكسين

ب. نعم، وهذه هي النتيجة 8 عند $n=3$. الأُسّ موجبٌ والنهاية عند $-\infty$ ، فالوجهتان متوافقتان.

سلسلة الإهمال: من اللّوغاريتم إلى الأُسّي

الوحدة السابقة أعطتنا أنّ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$ ، أي إنّ $\ln x$ مهملٌ أمام x . وهذا الدرس أعطانا أنّ x مهملٌ أمام e^x . فيبدو طبيعيّاً أن نستنتج الحلقة الثالثة.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln x} = +\infty$$

والكتاب لا يكتفي بالاستنتاج، بل يبرّره بجداءٍ واحد: عند $x>0$ تكون $\frac{e^x}{\ln x} = \frac{e^x}{x} \times \frac{x}{\ln x}$ ، وكلا العاملين يسعى إلى $+\infty$ ، فكذلك الجداء. هذا صادقٌ ومرتّب.

انتبه: لكن انتبه إلى ما ليس مكتوباً: لا توجد في الكتاب مبرهنةٌ تقول إنّ الإهمال ينتقل بالتسلسل. الكتاب برهن هذه الحالة الواحدة بالجداء، ولم يقعّد القاعدة. فإن استعملت « a مهمل أمام b و b مهمل أمام c إذن a مهمل أمام c » في ورقتك، اكتب معها الجداء الذي يبرّرها، ولا تسمّها مبرهنة.

حركةٌ واحدة تحلّ حالات عدم التعيين

الآن نأتي إلى ما يُطلب في الامتحان. حين يجتمع الأُسّي مع كثير حدود أو مع لوغاريتم، تظهر حالات عدم تعيينٍ من النمط $\infty - \infty$ أو $\frac{\infty}{\infty}$. والحركة التي تحلّها واحدةٌ لا تتغيّر: أخرِج العامل الغالب، وهو الأُسّي، ثمّ اقرأ ما بقي داخل القوس.

الكتاب يعطي ثلاثة أمثلة عند $+\infty$ ، وكلّها بالحركة نفسها. احسب نهايات التوابع الآتية عند $+\infty$.

$$f(x) = x - e^{x}$$
$$g(x) = e^{2x} - e^{x}$$
$$h(x) = e^{x} - \ln x$$

1. الأوّل: إخراج e^{x} الصيغة $\infty - \infty$ لا تُقرأ. نُخرج e^{x} ، فيبقى داخل القوس كسرٌ نعرف نهايته من المبرهنة 7 .

$$f(x) = e^{x}\left(\frac{x}{e^{x}} - 1\right)$$

2. قراءة الأوّل المبرهنة 7 عند $n = 1$ تعطي $\frac{x}{e^{x}} \to 0$ ، فما في القوس يسعى إلى -1 ، والعامل خارجه إلى $+\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty) \times (-1) = -\infty$$

3. الثاني: العامل المشترك أوضح هنا لا حاجة إلى المبرهنة 7 أصلاً، يكفي إخراج e^{x} لأنّ $e^{2x} = \left(e^{x}\right)^{2}$.

$$g(x) = e^{x}\left(e^{x} - 1\right) \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

4. الثالث: مرورٌ بحلقتين نُخرج e^{x} كالعادة، ثمّ نكسر الكسر الباقي إلى جداءٍ حلقتاه معلومتان: $\frac{\ln x}{x} \to 0$ من الوحدة السابقة، و $\frac{x}{e^{x}} \to 0$ من هنا.

$$h(x) = e^{x}\left(1 - \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{e^{x}}\right) \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$$

ثلاثة أمثلة، حركةٌ واحدة. إذا رأيت أُسّياً مع أيّ شيء آخر عند $+\infty$ ، أخرِج الأُسّي أوّلاً ولا تفكّر في غيره. وما يبقى داخل القوس يكون دائماً مجموعاً أو فرقاً لمقاديرٍ نهاياتها معروفة.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{n}}{e^{x}} = 0$$

والحركة نفسها تعمل في الكسور. خذ $g(x) = \frac{2e^{x}+1}{1+e^{x}}$: عند $+\infty$ الصيغة $\frac{\infty}{\infty}$ ، فنُخرج e^{x} من البسط ومن المقام معاً ونختصره.

$$\frac{2e^{x}+1}{1+e^{x}} = \frac{e^{x}\left(2+e^{-x}\right)}{e^{x}\left(e^{-x}+1\right)} = \frac{2+e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

وعند $-\infty$ لا حاجة إلى أيّ حيلة: e^{x} يسعى إلى الصفر، فتُقرأ العبارة مباشرةً $\frac{0+1}{1+0}=1$. فللخطّ البياني مقاربان أفقيّان، $y=2$ يميناً و $y=1$ يساراً، وهما مختلفان.

ما قيمة $\lim_{x\to+\infty}\left(e^{x}-x^{2}\right)$ ؟

أ) حالة عدم تعيين، فلا نهاية لها

ب) $-\infty$

ج) $+\infty$

ج. نعم. $e^{x}-x^{2}=e^{x}\left(1-x^{2}e^{-x}\right)$ ، والمبرهنة 7 عند $n=2$ تعطي $x^{2}e^{-x}\to 0$ ، فما في القوس يسعى إلى 1 .

المثال الكبير، وهو مسألة دورة 2026 بعينها

تذكّر: قبل أن تقرأ هذا المقطع، اعرف قيمته. التابع $f(x)=e^{-x}+x-2$ الذي يدرسه الكتاب هنا هو التابع نفسه الذي جاء في المسألة الثانية من دورة 2026 بمئة درجة، مع طلبين إضافيّين هما حساب مساحةٍ وسؤالٌ أخير على معادلة. وسلّم التصحيح الرسميّ يوزّع الدرجات على الخطوات التي تراها هنا واحدةً واحدة: النهايات والمشتق والجدول خمسون درجة، المقارب المائل عشرون، الرسم عشر.

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق ما يأتي. ادرس تغيّراته، وبيّن أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حلّين في $\mathbb{R}$.

$$f(x)=e^{-x}+x-2$$

1. النهاية عند $-\infty$ e^{-x} يسعى إلى $+\infty$ و $x-2$ إلى $-\infty$ ، فالصيغة غير معيّنة. نُخرج العامل الغالب، وهو هنا e^{-x} ، فتظهر النتيجة 8 عند $n=1$.

$$f(x)=e^{-x}\left(1+xe^{x}\right)-2$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

2. النهاية عند $+\infty$ والمقارب المائل هنا لا عدم تعيين: $e^{-x} \to 0$ و $x-2 \to +\infty$. لكن الفرع لا نهائيّ، فنبحث عن مقارب. والحيلة كلّها في ملاحظةٍ واحدة: الفرق بين التابع والمستقيم $y = x-2$ هو e^{-x} نفسه.

$$f(x) - (x-2) = e^{-x} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - (x-2)\big) = 0$$

3. الوضع النسبيّ، وهو طلبٌ مستقلّ لا تقف عند النهاية. سلّم التصحيح يعطي درجاتٍ منفصلة لإشارة الفرق، وهي هنا تعطي أكثر ممّا يُطلب: e^{-x} موجبٌ تماماً عند كلّ x ، لا عند $+\infty$ وحدها.

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) - (x-2) = e^{-x} > 0$$

4. المشتق وإشارته نشتقّ، ثمّ نُخرج e^{-x} لتظهر الإشارة. العامل e^{-x} موجبٌ دائماً، فإشارة المشتق هي إشارة $e^{x}-1$ ، أي إشارة x نفسها.

$$f'(x) = 1 - e^{-x} = e^{-x}\left(e^{x}-1\right)$$

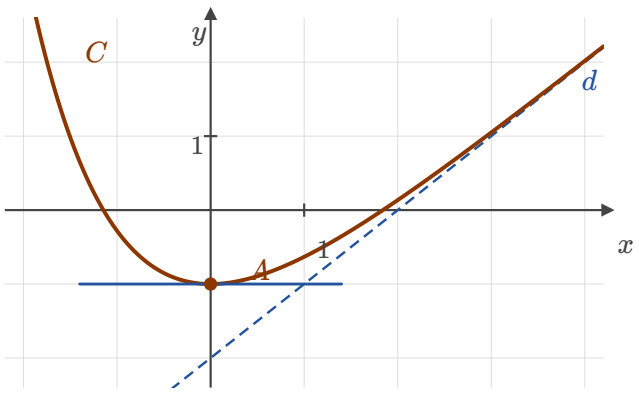
5. القيمة الحدّية المشتق ينعدم عند $x=0$ وحدها، وهناك القيمة الصغرى. احسبها بالتعويض المباشر.

$$f(0) = e^{0} + 0 - 2 = 1 - 2 = -1$$

لاحظ أنّ العامل الغالب اختلف بين الطرفين: عند $-\infty$ هو e^{-x} ، وعند $+\infty$ لم نحتج إخراجاً أصلاً لأنّ e^{-x} اختفى. الغالب ليس صفةً ثابتة للتابع، بل يتعلّق بالطرف الذي تنظر إليه.

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$



المماس في $A(0,\,-1)$ أفقيّ، والخطّ C يقع فوقه. ويقع كذلك فوق المقارب $d:\,y=x-2$ في كلّ مكان، لا عند $+\infty$ وحدها، لأنّ الفرق بينهما e^{-x} موجبٌ دائماً. والخطّ يقطع محور الفواصل مرّتين، وهذا ما يُطلب إثباته.

بقي الطلب الأخير: كم حلّاً للمعادلة $f(x)=0$ ؟ نقسم $\mathbb{R}$ إلى مجالَي الرتابة ونطبّق على كلٍّ منهما مبرهنة القيمة الوسطى. على $]-\infty,\,0[$ التابع مستمرٌّ ومتناقصٌ تماماً، وصورته المجال $]-1,\,+\infty[$ ، والصفر ينتمي إليه، فهناك حلٌّ واحدٌ لا غير. وعلى $[0,\,+\infty[$ التابع مستمرٌّ ومتزايدٌ تماماً، وصورته $[-1,\,+\infty[$ ، والصفر ينتمي إليه أيضاً، فهناك حلٌّ ثانٍ. فالمجموع حلّان.

انتبه: انظر إلى الأقواس، فهي ليست تفصيلاً. المجال الأيسر مفتوحٌ عند الصفر والأيمن مغلقٌ عنده. لو أغلقتَ الاثنين لصار الصفر في المجالين معاً، ولحُسب الحلّ الواحد مرّتين إن صادف أن يقع هناك؛ ولو فتحتَ الاثنين لسقطت النقطة $x=0$ من الحساب. الكتاب يضبط القوسين بدقّة، وهذا هو المكان الذي يضيع فيه نصف البرهان في الامتحان.

أثبتنا أنّ $f(x)-(x-2)=e^{-x}$. ماذا يعني ذلك عن وضع الخطّ C بالنسبة إلى المقارب d ؟

أ) C يقع فوق d عند كلّ x حقيقيّ

ب) لا شيء غير أنّ d مقاربٌ عند $+\infty$

ج) C فوق d عند $+\infty$ وتحته عند $-\infty$

أ. نعم، والكتاب يقولها بكلمة «كاملاً». الفرق موجبٌ تماماً في كلّ مكان، فالوضع ليس تقاربيّاً فقط بل مطلق. اكتب الإشارة، لا النهاية وحدها.

نهاياتٌ مميّزة، والعدد e من حيث لا تنتظره

المقطع الأخير يعالج صيغةً جديدة: a^b حيث a و b تابعان للمتحوّل. والقاعدة فيها واحدة، والكتاب يذكّر بها في مصباح: عُد دائماً إلى التعريف من الدرس الثاني.

$$a^b=\exp\left(b\ln a\right)$$

أوّل هذه النهايات يعطي العدد e نفسه، وهو من أشهر ما في التحليل. جد نهاية التابع الآتي عند الصفر.

$$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

1. العودة إلى التعريف الأساس $1+x$ والأُسّ $\frac{1}{x}$ ، وكلاهما يتعلّق بـ x . فنكتب العبارة أُسّيّةً خالصة.

$$f(x)=\exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$$

2. نهاية الأُسّ ما في الأُسّ نهايةٌ معروفة من الوحدة السابقة، وهي المرافقة للتمهيد الذي رأيناه في الدرس الثالث.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

3. تركيب النهايتين التابع الأسّي مستمرٌّ، فتنتقل النهاية إلى داخله. هنا يظهر e من حيث لم يكن في العبارة أصلاً.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{1}=e$$

4. الصورة الثانية بتغيير المتحوّل ضع $u=\frac{1}{x}$: إذا سعى x إلى $+\infty$ سعى u إلى الصفر، فتصير العبارة هي السابقة نفسها.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

الصورتان واحدة، والفرق تغييرُ متحوّل. احفظهما معاً، فالامتحان يسأل عنهما بالصورتين. وكلّ عبارةٍ من النمط a^{b} تُعالَج بالحركة نفسها: حوّلها إلى $\exp(b\ln a)$ ، احسب نهاية الأُسّ، ثمّ أدخِلها.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

انتبه: وهنا ثغرةٌ أخرى من ثغرات الكتاب في هذا الدرس، وهي أوضحها. التحويل $a^{b}=\exp(b\ln a)$ مشروطٌ بأن يكون a موجباً تماماً، وإلّا فلا وجود لـ $\ln a$. ومع ذلك لا يذكر الكتاب مجموعة تعريفٍ في أيٍّ من أمثلة هذا المقطع، مع أنّ نصّ السؤال عنده هو «جد نهاية كلٍّ من التوابع الآتية». في $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ يلزم $x>-1$ و $x\neq 0$. اكتب الشرط دائماً، فهو يُسأل عنه.

تذكّر: وكلمةٌ عن بنية الدرس، تفيدك في المراجعة: تمارين «تدرّب» في آخر الصفحة 181 هي الأمثلة الثلاثة نفسها بصياغةٍ جديدة. سؤالها الأوّل يحمل نصّ أحد أمثلة الكتاب حرفاً بحرف، وسؤالها الثالث نصّ مثالٍ آخر منها كذلك. فمن فهم الأمثلة، حلّ التمارين؛ ومن لم يفهمها، لن ينقذه الحفظ.

المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 177 إلى 181 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.