بسيطة

الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

دراسة التوابع الأسّية بالأساس a

أساسٌ غير e، وكلّ شيءٍ فيه يتقرّر بإشارة لوغاريتم الأساس وحدها

التابع الأسّي . الوحدة 6 . الدرس 5

حتّى الآن كان الأساس دائماً e . فماذا لو كان 2 أو $\frac{1}{2}$ أو 10 ؟ الجواب أنّه لا شيء جديد يُبنى: تعريف الدرس الثاني $a^x = e^{x \ln a}$ يردّ كلّ أساسٍ موجبٍ إلى e ، وما بقي هو قراءة. لكنّ القراءة تتوقّف كلّها على شيءٍ واحد: إشارة $\ln a$.

فوق الواحد موجبة، وتحته سالبة، ومن هذه الإشارة يخرج كلّ شيء، الاشتقاق والرتابة والنهايتان وشكل الخطّ. وهي بالضبط ما لا يلوّنه الكتاب في هذا الدرس، مع أنّه لوّن نظيرتها في الوحدة السابقة.

الأساس a ، والرمز $\exp_a$

الدرس الثاني عرّف القوّة ذات الأُسّ الحقيقيّ: عند a موجبٍ تماماً يكون $a^x = e^{x \ln a}$. ومن هذا التعريف وحده يخرج هذا الدرس كلّه. لاحظ أنّ التابع الأسّي الذي درسناه هو حالةٌ خاصّة منه، وهي $a = e$ ، لأنّ $\ln e = 1$.

$$\exp_a : x \mapsto a^x = e^{x \ln a}$$

الكتاب يسمّي هذا التابع «التابع الأسّي بالأساس a » ويرمز إليه $\exp_a$. ولاحظ أين وضع هذا كلّه: في نصٍّ جارٍ، لا في إطار «تعريف». هذا الدرس لا يحوي إطار «تعريف» واحداً، والإطار الذي يشرح a^x أصلاً هو «تعريف 2» على الصفحة 170 ، أي في الدرس الثاني.

انتبه: وهنا موضعٌ يستحقّ الانتباه. عنوان الدرس يقول $a > 0$ ، ثمّ يستثني النصّ بعد سطرين الحالة $a = 1$ ، لأنّ $\exp_1$ هو التابع الثابت 1 . ثمّ تكتب المبرهنة الشرط بصورةٍ ثالثة، اتّحاد مجالين. ثلاث صياغاتٍ للشرط نفسه في صفحةٍ واحدة. والأدقّ منها جميعاً أن تقول: a موجبٌ تماماً ويخالف الواحد.

$$a \in]0,\ 1[\cup]1,\ +\infty[$$

تذكّر: وموضع الاستثناء نفسه فيه شيء. صيغة الاشتقاق التي تأتي بعد قليل صحيحةٌ عند $a = 1$ أيضاً، لأنّها تعطي $\ln 1 = 0$ ، أي مشتقّاً معدوماً، وهذا صحيح لتابعٍ ثابت. الذي يسقط عند $a = 1$ ليس الصيغة بل النتيجة التي بعدها، أي الرتابة التامّة. الكتاب يضع الشرط في المقدّمة ولا يقول لماذا.

المشتق، وإشارةٌ واحدة تقرّر كلّ شيء

الاشتقاق لا يحتاج عملاً جديداً. $\exp_a$ من النمط $e^{u(x)}$ مع $u(x) = x \ln a$ ، وهو تابعٌ خطّيّ مشتقّه العدد الثابت $\ln a$. فنطبّق المبرهنة 6 من الدرس الثالث ونقرأ.

مبرهنة 9

$\exp_a' = (\ln a)\, \exp_a$ التابع $\exp_a$ اشتقاقيٌّ على $\mathbb{R}$ كلّه، ومشتقّه هو نفسه مضروباً بالعدد الثابت $\ln a$.

$a > 1 \Longrightarrow \exp_a \nearrow$ لأنّ $\ln a > 0$ ، فالمشتق موجبٌ تماماً: تزايدٌ تامّ على $\mathbb{R}$.

$0 < a < 1 \Longrightarrow \exp_a \searrow$ لأنّ $\ln a < 0$ ، فالمشتق سالبٌ تماماً: تناقصٌ تامّ على $\mathbb{R}$.

الكتاب، الصفحة 182

تذكّر: اقرأ البرهان في سطرٍ واحد: a^x موجبٌ تماماً دائماً، فإشارة المشتق هي إشارة $\ln a$ وحدها. ومن هنا كلّ ما في هذا الدرس. احفظ العتبة لا الحالتين: $\ln a$ يتغيّر إشارته عند $a = 1$ ، لا عند $a = 0$.

انتبه: الكتاب لا يلوّن في هذه المبرهنة شيئاً، ولا في برهانها. وهذا لافت: في الوحدة السابقة كانت العبارة الزرقاء الوحيدة في مبرهنةٍ هي بالضبط الشرط الذي يسقطه الطلّاب. هنا يوجد شرطٌ يلعب الدور نفسه تماماً، وهو إشارة $\ln a$ ، والكتاب يتركه بلا علامة. ضع أنت العلامة: قبل أن تكتب أيّ شيء عن الرتابة، اكتب إشارة $\ln a$.

ما مشتقّ التابع $f(x) = 3^x$ ؟

أ) $f'(x) = 3^x$

ب) $f'(x) = (\ln 3)\, 3^x$

ج) $f'(x) = x\, 3^{x-1}$

ب. نعم. اكتبها $3^x = e^{x \ln 3}$ ، فالمشتق الداخلي هو الثابت $\ln 3$ ويخرج عاملاً. وبما أنّ $3 > 1$ فـ $\ln 3 > 0$ والتابع متزايدٌ تماماً.

الحالتان، والنهايتان، والشكل

النهايتان تُقرآن من الأُسّ $x\ln a$ ، وهو جداءٌ يتغيّر اتّجاهه بإشارة $\ln a$. ضع $X = x\ln a$ واقرأ: إذا كان $\ln a > 0$ سار X مع x ، وإذا كان سالباً سار عكسه. الكتاب يقفز من العبارة إلى القيمة في سطرٍ واحد ولا يكتب هذه الخطوة.

$$\begin{aligned} a>1: \quad & \lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \\ & \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \\ 0<a<1: \quad & \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \\ & \lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \end{aligned}$$

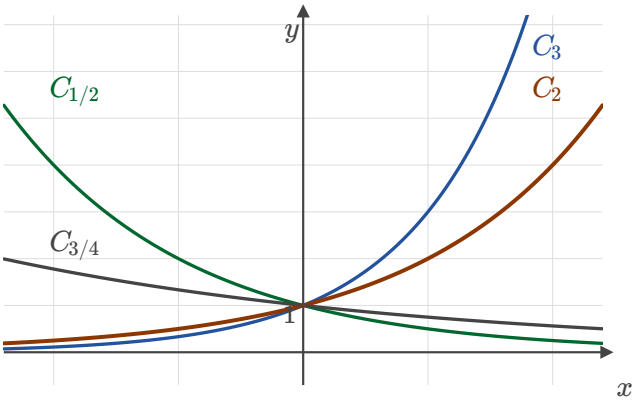
تذكّر: في الحالتين يكون محور الفواصل مستقيماً مقارباً، لكن في جهتين متعاكستين: عند $-\infty$ إذا كان $a>1$ ، وعند $+\infty$ إذا كان $0<a<1$. ولا يبلغه الخطّ أبداً، لأنّ a^x موجبٌ تماماً في كلّ مكان.

x	$-\infty$		$+\infty$
$\exp_a(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

هذا الجدول للحالة $a>1$. وفي الحالة الأخرى ينقلب رأساً على عقب: يبدأ من $+\infty$ يساراً وينتهي إلى الصفر يميناً، والسهم يتّجه إلى الأسفل. جدولان، وفرقهما كلّه إشارةٌ واحدة.

x	$-\infty$		$+\infty$
$\exp_a(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

انتبه: الرقمان 0 و $+\infty$ في طرفَي الجدولين ليسا قيمتين للتابع بل نهايتين، والجدول لا يميّزهما بشيء. لا يوجد x حقيقيّ يعطي $a^x = 0$.



أربعة أساساتٍ في معلمٍ واحد. كلّ الخطوط تمرّ بالنقطة $(0,\,1)$ ، لأنّ $a^0 = 1$ أيّاً كان a . و C_2 و C_3 صاعدان لأنّ الأساس فوق الواحد، و $C_{1/2}$ و $C_{3/4}$ نازلان لأنّه تحته. ولاحظ أنّ C_3 أشدّ ميلاً من C_2 ، لأنّ $\ln 3$ أكبر من $\ln 2$. الميل يقاس بـ $|\ln a|$ لا ببعد الأساس عن الواحد: $C_{1/2}$ و C_2 متساويان في الشدّة تماماً، لأنّ $|\ln 2| = |\ln 0.5|$.

تتمّات: تناظران مختلفان

الوحدة السابقة عرّفت اللّوغاريتم بالأساس a بالصيغة $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$. فما علاقته بالتابع الذي ندرسه هنا؟ الجواب في سطرين، والكتاب يكتبهما ثمّ ينتقل.

$$\begin{aligned}\exp_a\big(\log_a(x)\big) &= e^{(\ln a)\,\log_a(x)}\\ &= e^{\ln x} = x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_a\big(\exp_a(x)\big) &= \frac{1}{\ln a}\ln\left(e^{x\ln a}\right)\\ &= x\end{aligned}$$

تذكّر: فـ $\exp_a$ هو التقابل العكسي لـ $\log_a$ ، تماماً كما كان $\exp$ عكس $\ln$ في الدرس الأوّل. ولاحظ الشرطين المختلفين، فهما ليسا في الصيغة بل حولها: السطر الأوّل يصحّ عند $x > 0$ وحدها لأنّ $\log_a$ لا يقبل غير ذلك، والسطر الثاني يصحّ عند كلّ x حقيقيّ. وهذا عدم التناظر نفسه الذي رأيته في الدرس الأوّل بين $e^{\ln x}$ و $\ln\left(e^x\right)$. وحالةٌ خاصّة يذكرها الكتاب: $\exp_{10}$ هو عكس اللّوغاريتم العشريّ $\log$.

ومن هذا يتبع أنّ خطّ $\exp_a$ وخطّ $\log_a$ متناظران بالنسبة إلى المستقيم $y = x$. والآن انتبه، لأنّ الكتاب يضع بعد سطرٍ واحدٍ تناظراً آخر مختلفاً تماماً، بلا فاصلٍ ولا تنبيه.

التناظر الثاني يربط أساسين لا تابعين. أثبت أنّ خطّي C_a و $C_{1/a}$ متناظران بالنسبة إلى محور التراتيب.

$$a^x = \left(\tfrac{1}{a}\right)^{-x}$$

1. العودة إلى الأساس e كالعادة، كلّ شيءٍ يبدأ بالتعريف. نكتب a^x أُسّياً بالأساس e .

$$a^x = e^{x \ln a}$$

2. ضرب الإشارتين نضرب الأُسّ في $(-1) \times (-1)$ ، وهي حركةٌ لا تغيّر شيئاً ظاهراً لكنّها تفتح الطريق.

$$e^{x \ln a} = e^{(-x)(-\ln a)}$$

3. قاعدة المقلوب في اللّوغاريتم من الوحدة السابقة $-\ln a = \ln \frac{1}{a}$. نعوّض، فيظهر الأساس المقلوب.

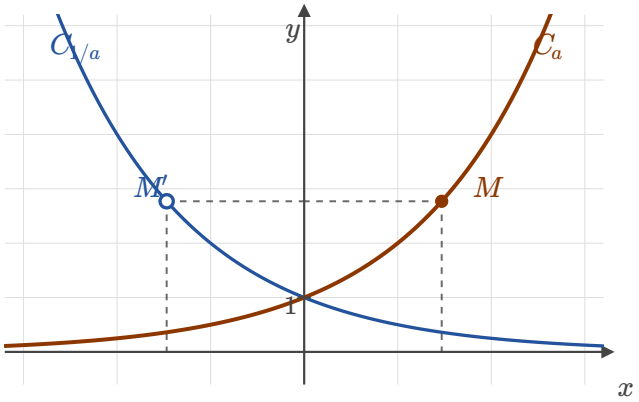
$$e^{(-x)\ln \frac{1}{a}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$$

4. القراءة الهندسيّة النقطة M ذات الفاصلة x على C_a لها الارتفاع a^x . والسطر السابق يقول إنّ هذا الارتفاع نفسه هو قيمة $C_{1/a}$ عند الفاصلة $-x$. فالنقطتان على ارتفاعٍ واحد وفاصلتين متعاكستين.

$$M\left(x,\, a^x\right) \qquad M'\left(-x,\, \left(\tfrac{1}{a}\right)^{-x}\right)$$

لا تختصر الخطوة الأخيرة. ارتفاع M' يساوي a^x عدديّاً، وكتابته هكذا أقصر، لكنّها تخفي ما يُراد إثباته: أنّ M' نقطةٌ من $C_{1/a}$. الصورة $\left(\tfrac{1}{a}\right)^{-x}$ هي وحدها التي تُظهر ذلك، والكتاب يكتبها هكذا عن قصد.

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$$



المرسوم هو الحالة $a = 2$ ، والكتاب يفعل الشيء نفسه وإن كتب a مجرّدة. النقطتان M و M' على ارتفاعٍ واحد وفاصلتين متعاكستين، والخطّان المتقاطعان يلتقيان على محور التراتيب: هذا هو التناظر بعينه. ولا تخلطه بالتناظر السابق، فذاك كان بين $\exp_a$ و $\log_a$ بالنسبة إلى $y = x$ ، وهذا بين أساسٍ ومقلوبه بالنسبة إلى محور التراتيب.

خطّا التابعين $x \mapsto 5^x$ و $x \mapsto \left(\frac{1}{5}\right)^x$ متناظران بالنسبة إلى:

أ) المستقيم $y = x$

ب) محور الفواصل

ج) محور التراتيب

ج. نعم. $\left(\frac{1}{5}\right)^{-x} = 5^x$ ، فالارتفاع نفسه يظهر عند الفاصلة المعاكسة. وتبديل x بـ $-x$ هو التناظر بالنسبة إلى محور التراتيب.

دراسةٌ كاملة: $f(x) = x \cdot 2^x$

المثال الوحيد في هذا الدرس يجمع أساساً غير e مع عامل x خارجه. وفيه حركةٌ عند $-\infty$ تستحقّ أن تُرى، لأنّها تردّ الحالة إلى نتيجةٍ نعرفها من الدرس الرابع.

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق ما يأتي. ادرس تغيّراته وارسم خطّه البياني.

$$f(x) = x \cdot 2^x$$

1. الردّ إلى الأساس e أوّل حركةٍ في كلّ تابعٍ بأساسٍ غير e : اكتبه بالأساس e . ما بعد ذلك أدواتٌ نعرفها كلّها.

$$f(x) = x\, e^{x \ln 2}$$

2. النهاية عند $-\infty$ الصيغة $0 \times (-\infty)$ غير معيّنة. الحيلة: نضع $u(x) = x \ln 2$ ونجعل العبارة من النمط ue^u ، لأنّ نهايته عند $-\infty$ معروفة من النتيجة 8 في الدرس الرابع.

$$f(x) = \frac{1}{\ln 2}\, u(x)\, e^{u(x)} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

3. النهاية عند $+\infty$ هنا لا عدم تعيين: العاملان يكبران معاً، فالجداء يكبر. الكتاب لا يكتب حتّى هذا السطر.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

4. المشتق بقانون الجداء نشتقّ الجداء. مشتقّ 2^x هو $(\ln 2)2^x$ بحسب المبرهنة 9 ، ثمّ نُخرج العامل المشترك.

$$f'(x) = 2^x\,(1 + x \ln 2)$$

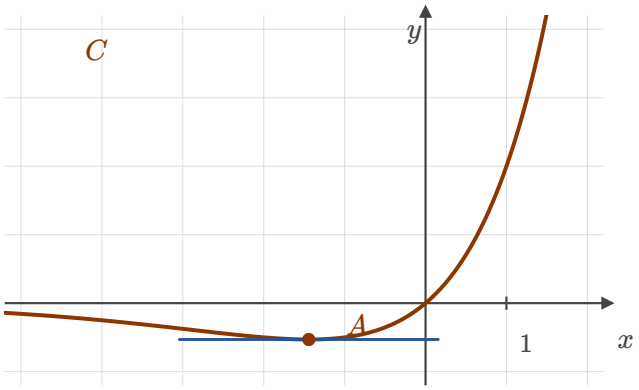
5. الإشارة والقيمة الصغرى العامل 2^x موجبٌ دائماً، فتبقى إشارة $1 + x\ln 2$ ، وهي تنعدم عند فاصلةٍ واحدة. عوّض بها لتحصل على القيمة الصغرى.

$$x = -\frac{1}{\ln 2} \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \frac{-1}{e\ln 2} \approx -0.5307$$

الحركتان اللتان تتكرّران في كلّ تابعٍ بأساسٍ غير e : اكتبه بالأساس e أوّلاً، ثمّ أخرج العامل الأُسّي من جدول الإشارة لأنّه موجبٌ تماماً. وما بقي هو حسابٌ عاديّ.

$$\forall x : 2^x > 0 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sgn} f'(x) = \operatorname{sgn}(1 + x\ln 2)$$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{\ln 2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-1}{e\ln 2}$	$\nearrow$	$+\infty$



الخطّ يقترب من محور الفواصل يساراً دون أن يبلغه، ثمّ ينزل إلى أدنى نقطةٍ عند A ذات الفاصلة $-\frac{1}{\ln 2} \approx -1.4427$ ، ثمّ يصعد بلا حدّ. والمماس في A أفقيّ، وهذا ما يعنيه انعدام المشتق هناك. وشكل الكتاب نفسه لا يحمل أيّ رقم؛ نحن نضع الفاصلة 1 لتقيس بها.

تذكّر: وكلمةٌ عن الوزن في البكالوريا. هذا الدرس ليس بابَ مسألةٍ كبيرة، لكنّه يعطي أسئلةً قصيرة تتكرّر: تبسيط عددٍ مثل $3^{-\frac{1}{\ln 3}}$ ورد في دورة 2023 بعشرين درجة، واشتقاق $3^{(\sin x)^2}$ ورد في دورة 2026 بعشر درجات، ومعادلةٌ من النمط $9^x + 3^{x+1} - 4 = 0$ وردت في دورة 2017 بأربعين درجة. ثلاثة أسئلةٍ صغيرة، وكلّها من هنا.

المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 182 إلى 185 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.