بسيطة

الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

تمثيل الأشعّة بأعداد عقديّة

الشعاع يصير عدداً واحداً، وهو فرق لاحقتَي طرفيه

تطبيقات الأعداد العقديّة في الهندسة . الوحدة 5 . الدرس 1

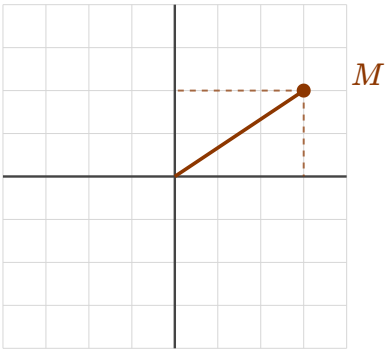
في الوحدة السابقة كان العدد العقدي نقطة في المستوي. الآن نُسنِد إليه عملاً ثانياً: أن يمثّل شعاعاً. ولمّا كان الشعاع أداة الهندسة الأولى، فإنّ كل سؤال هندسي عن التوازي والمنتصف والاستقامة يتحوّل من هذه اللحظة إلى حساب على أعداد. الدرس قصير، سطران يُحفظان، لكنّه الباب الذي تمرّ منه الوحدة كلّها.

الشعاع يصير عدداً

في هذه الوحدة كلّها نعمل في مستوٍ مزوّد بمعلم متجانس $(O\,;\,u,\,v)$. هذه الجملة ليست مقدّمة شكلية: بلا معلم لا توجد إحداثيّات، وبلا إحداثيّات لا يوجد عدد عقدي نربطه بشيء.

الربط الأوّل تعرفه من قبلُ: لكلّ نقطة $M(x,y)$ عدد عقدي $z_M = x + iy$. الجديد هنا ربط ثانٍ، بالطريقة نفسها تماماً: لكلّ شعاع w مركّبتاه (a,b) عدد عقدي.

$$z = a + ib$$



المركّبتان $(3,\,2)$ تصفان الشعاع $\overrightarrow{OM}$ ، والعدد $3 + 2i$ يحمل الوصف نفسه مجموعاً في رمز واحد.

تذكّر: الشعاع لا موضع له، له اتّجاه وطول فقط. لذلك يحمل شعاعان لهما الاتّجاه نفسه والطول نفسه العدد نفسه، مهما ابتعد أحدهما عن الآخر في المستوي.

انتبه: أكثر ما يضيّع الدرجات في هذه الوحدة ليس الحساب، بل البدء به قبل تثبيت المعلم. اكتب الجملة أوّلاً، ثمّ احسب.

النهاية ناقص البداية

نادراً ما يُعطى الشعاع بمركّبتيه. الأغلب أن يُعطى بنقطتين: A بدايةً و B نهايةً. فما العدد الممثّل للشعاع $\overrightarrow{AB}$ ؟

نكتب النقطتين بإحداثيّاتهما: $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$. ومن الهندسة نعرف مركّبتَي الشعاع: كلّ مركّبة هي إحداثيّة النهاية ناقص إحداثيّة البداية.

$$\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A,\ y_B - y_A)$$

نطبّق على هاتين المركّبتين تعريف الفقرة السابقة، ثمّ نعيد ترتيب الحدود فيظهر فرق العددين من تلقاء نفسه:

$$\begin{aligned} z &= (x_B - x_A) + i(y_B - y_A) \\ &= (x_B + iy_B) - (x_A + iy_A) \\ &= z_B - z_A \end{aligned}$$

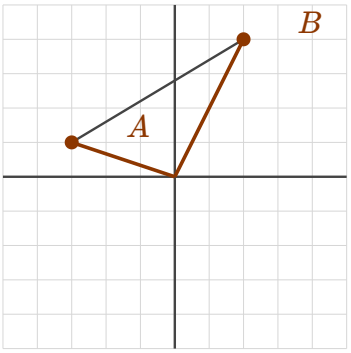
سطر واحد، وهو كلّ ما في الدرس تقريباً: عدد الشعاع هو عدد النهاية ناقص عدد البداية.

تعريف 1

العدد العقدي المُمثّل للشعاع w الذي مركّباته (a, b) . $z = a + ib$

العدد العقدي الممثّل للشعاع $\overrightarrow{AB}$ ، حيث z_A و z_B هما العددان اللذان يمثّلان A و B بالترتيب. $z = z_B - z_A$

الكتاب، الصفحة 113



الشعاعان $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ يبدآن من المبدأ، والشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو الفرق بينهما. ولهذا كان عدده $z_B - z_A$.

انتبه: الترتيب ليس حرّاً. العدد $z_B - z_A$ للشعاع $\overrightarrow{AB}$ ، والعدد $z_A - z_B$ للشعاع $\overrightarrow{BA}$ ، وهما شعاعان متعاكسان. الطول لا يفرّق بينهما، أمّا الاتّجاه فينقلب، وعلى الاتّجاه يقوم الدرس القادم كلّه.

النقطتان A و B يمثّلهما العددان الآتيان، وهما من مثال الكتاب الذي نحلّه في آخر الدرس. ما العدد الممثّل للشعاع $\overrightarrow{AB}$ ؟

$$a = 6 - i \qquad b = -6 + 3i$$

أ) $-12 + 4i$
ب) $12 - 4i$
ج) $-6 + 3i$

أ. صحيح. $b - a = (-6 - 6) + (3 + 1)i = -12 + 4i$.

تساوي الأشعّة ومتوازي الأضلاع

ما دام لكلّ شعاع عدد واحد، ولكلّ عدد شعاع واحد، فإنّ سؤال الهندسة عن تساوي شعاعين صار سؤال حساب: هل العددان متساويان؟ والعمليتان تنتقلان مع الترجمة بلا تغيير.

نتيجة 1

$z = z' \iff w = w'$ تساوي شعاعين يُكافئ تساوي العددين العقديين اللذين يمثّلانهما.

$z + z'$ هو العدد الممثّل للشعاع $w + w'$.

λz هو العدد الممثّل للشعاع λw ، حيث λ عدد حقيقي.

الكتاب، الصفحة 113

انتبه: الشرط على λ أن يكون حقيقياً ليس زينة. الضرب بعدد حقيقي يمدّ الشعاع أو يقصره أو يعكسه، ويبقيه على استقامته. أمّا الضرب بعدد عقدي غير حقيقي فيديره ويخرجه عن استقامته، ويضرب طوله بطويلة ذلك العدد، وذلك موضوع الدرس الثالث لا هذا الدرس.

تُترجم هذه النتيجة فوراً أشهر شكل في الامتحان. الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع معناه $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. نستبدل كلّ شعاع بعدده ونعيد الترتيب:

$$b - a = c - d$$
$$a + c = b + d$$

الصيغة الثانية أنظف: لا طرح فيها ولا ترتيب يُنسى. ومعناها الهندسي أنّ للقطرين $[AC]$ و $[BD]$ المنتصف نفسه، وسنرى لماذا حين نصل إلى سطر المنتصف.

شعاعان في المستوي طولهما واحد. هل نستنتج أنّهما متساويان؟

أ) نعم، تساوي الطولين يكفي
ب) لا، حتى يتساوى العددان الممثّلان لهما
ج) لا يمكن الحكم بالأعداد العقدية

ب. صحيح. التساوي في الأشعّة يكافئ تساوي العددين، لا تساوي الطويلتين.

مركز الأبعاد المتناسبة

النقطة المثقّلة $(A\ ;\ \alpha)$ هي نقطة معها معامل. ومركز الأبعاد المتناسبة لجملة نقاط مثقّلة هو النقطة التي توازن الجملة، والمساواة الشعاعيّة التي تصفه معروفة من قبلُ:

$$\alpha_1\overrightarrow{OA_1}+\alpha_2\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{OA_n}=(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)\,\overrightarrow{OG}$$

كلّ شعاع في هذه المساواة يبدأ من المبدأ O ، وعدد المبدأ هو 0 . فالعدد الممثّل للشعاع $\overrightarrow{OA_k}$ هو z_k نفسه، والعدد الممثّل للشعاع $\overrightarrow{OG}$ هو z_G . نستبدل الأشعّة بأعدادها، فتصير المساواة الشعاعية معادلة عادية بين أعداد:

$$\alpha_1 z_1+\alpha_2 z_2+\cdots+\alpha_n z_n=(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)\,z_G$$

ثمّ نقسم الطرفين على مجموع المعاملات، وهنا يظهر الشرط الوحيد في المبرهنة:

مبرهنة 2

العدد الممثّل للنقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة، بشرط $z_G=\frac{\alpha_1 z_1+\alpha_2 z_2+\cdots+\alpha_n z_n}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}$. $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\neq 0$

الكتاب، الصفحة 113

انتبه: إذا كان مجموع المعاملات معدوماً فلا وجود لمركز الأبعاد المتناسبة أصلاً، والكسر الذي كتبناه بلا معنى. تحقّق من المجموع قبل أن تكتب الكسر، لا بعده.

تذكّر: سلّم التصحيح يمنح درجات هذا القانون على ثلاث خطوات مفصولة: تكتب القانون، ثمّ تعوّض، ثمّ تعلن النتيجة. ومن يقفز إلى النتيجة وحدها يخسر درجتَي القانون والتعويض.

المنتصف ومركز الثقل

الحالتان اللتان تتكرّران في الامتحان أكثر من غيرهما هما أبسط حالتين من المبرهنة السابقة: كلّ المعاملات تساوي 1 .

نقطتان بمعاملين 1 و 1 : المجموع 2 ، ومركز الأبعاد هو منتصف القطعة. وثلاث نقاط بمعاملات 1 : المجموع 3 ، ومركز الأبعاد هو مركز ثقل المثلّث.

المنتصف ومركز الثقل

$z_I = \frac{z_A+z_B}{2}$ العدد الممثّل لمنتصف القطعة المستقيمة $[AB]$.

$z_G = \frac{z_M+z_N+z_P}{3}$ العدد الممثّل لمركز ثقل المثلّث $[MNP]$.

الكتاب، الصفحة 114

وهنا نفي بالوعد الذي قطعناه عند متوازي الأضلاع. سطر المنتصف يقول إنّ العدد الممثّل لمنتصف $[AC]$ هو $\frac{a+c}{2}$ ، والعدد الممثّل لمنتصف $[BD]$ هو $\frac{b+d}{2}$. ولمّا كان $a+c=b+d$ ، فإنّ قسمة الطرفين على 2 تجعل العددين متساويين، ونقطتان يمثّلهما عدد واحد منطبقتان. إذن للقطرين $[AC]$ و $[BD]$ المنتصف نفسه.

يستعمل الكتاب هذين السطرين فوراً في مسألة لطيفة: إذا كانت A و B و C منتصفات أضلاع $[NP]$ و $[PM]$ و $[MN]$ من مثلّث MNP بالترتيب، فللمثلّثين MNP و ABC مركز الثقل نفسه.

الحلّ لا يحتاج رسماً ولا قياساً ولا حتى أرقاماً. نرمز بـ m و n و p إلى أعداد رؤوس المثلّث الأوّل، فتخرج أعداد المنتصفات من سطر المنتصف مباشرة:

$$a=\frac{n+p}{2} \qquad b=\frac{m+p}{2} \qquad c=\frac{n+m}{2}$$

ثمّ نحسب مركزَي الثقل، كلّاً على حدة، بسطر مركز الثقل:

$$g=\frac{1}{3}(m+n+p)$$
$$g'=\frac{1}{3}\left(\frac{n+p}{2}+\frac{p+m}{2}+\frac{m+n}{2}\right)=\frac{1}{3}(m+n+p)$$

العددان متساويان، فالنقطتان G و G' منطبقتان. لاحظ أنّ كلّ حرف في هذا الحلّ رمز، ولا رقم واحد فيه. هذا أسلوب الكتاب نفسه، وهو أسرع وأقلّ عرضة للخطأ من التعويض بالأرقام.

ما العدد الممثّل لمنتصف القطعة $[AB]$ إذا كان:

$$a = 6 - i \qquad b = -6 + 3i$$

أ) $2i$
ب) $-12 + 4i$
ج) i

ج. صحيح. $\frac{(6-i)+(-6+3i)}{2} = \frac{2i}{2} = i$.

ثلاث نقاط على استقامة واحدة

نختم بالمثال المحلول في الكتاب، وهو أوّل ثمرة عملية لسطر النهاية ناقص البداية.

نتأمّل معلماً متجانساً في المستوي العقدي، والنقاط A و B و C التي تمثّلها الأعداد الآتية بالترتيب. المطلوب إثبات وقوع النقاط الثلاث على استقامة واحدة.

$$a = 6 - i \qquad b = -6 + 3i \qquad c = -18 + 7i$$

1. نترجم المطلوب الوقوع على استقامة واحدة يعني ارتباط الشعاعين خطّياً، أي وجود عدد حقيقي λ يحقّق المساواة الآتية. لاحظ أنّ الشعاعين يبدآن من النقطة نفسها، وهذا هو ما يجعلهما قابلين للمقارنة.

$$\overrightarrow{AC} = \lambda\,\overrightarrow{AB} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

2. عدد الشعاع الأوّل النهاية B ناقص البداية A . نطرح الجزأين كلّاً على حدة. ويكتب الكتاب هنا $Z_{\overrightarrow{AB}}$ للعدد الممثّل للشعاع، وهي كتابة مريحة حين يدور الكلام على أكثر من شعاع في المسألة الواحدة.

$$Z_{\overrightarrow{AB}} = b - a = (-6 + 3i) - (6 - i) = -12 + 4i$$

3. عدد الشعاع الثاني البداية نفسها A ، والنهاية هذه المرّة C .

$$Z_{\overrightarrow{AC}} = c - a = (-18 + 7i) - (6 - i) = -24 + 8i$$

4. نقارن العددين كلّ جزء في العدد الثاني ضِعف نظيره في الأوّل: -24 ضِعف -12 ، و 8 ضِعف 4 . إذن العدد الثاني ضِعف الأوّل بالضبط.

$$Z_{\overrightarrow{AC}} = 2\,Z_{\overrightarrow{AB}}$$

5. نعود إلى الهندسة تساوي العددين يكافئ تساوي الشعاعين، فيكون $\lambda = 2$ وهو عدد حقيقي. ومنه وقوع النقاط A و B و C على استقامة واحدة. هذه الجملة الأخيرة تُكتب ولا يُكتفى بالحساب، فهي وحدها التي تُبَنَّد.

$$\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AB}$$

لإثبات الاستقامة: اختر نقطة واحدة بدايةً للشعاعين، اكتب عدد كلّ منهما بالنهاية ناقص البداية، ثمّ ابحث عن معامل حقيقي بينهما. وشرط ذلك أن تكون A و B نقطتين متمايزتين، وإلّا كان الشعاع $\overrightarrow{AB}$ معدوماً فلا يصلح مرجعاً.

$$c - a = \lambda\,(b - a) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

تذكّر: في أرقام هذا المثال نفسه يختبئ سطر المنتصف: $\frac{a+c}{2} = \frac{-12+6i}{2} = -6 + 3i$ ، وهو العدد b . فالنقطة B منتصف $[AC]$ ، وهذا يتّفق تماماً مع $\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AB}$. الكتاب لا يقولها، لكنّها تخرج من السطرين اللذين تعلّمناهما.

تذكّر: سطران يُحفظان من هذا الدرس كلّه: عدد الشعاع هو النهاية ناقص البداية، وعدد مركز الأبعاد المتناسبة هو المتوسّط المُثقَّل للأعداد. كلّ ما يأتي في الدرسين التاليين مبنيّ عليهما.

المصدر: الرياضيات، الجزء الثاني، الصفحات 113 إلى 114 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.