بسيطة

الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

استعمال العدد العقديّ الممثّل لشعاع

فرق واحد يعطي المسافة، وكسر بين فرقين يعطي النسبة والزاوية

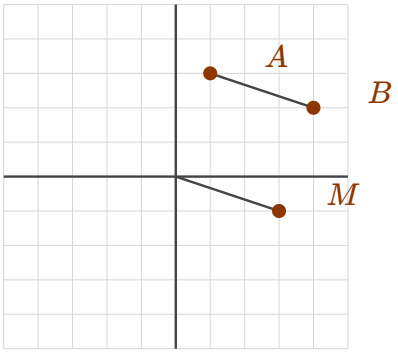
تطبيقات الأعداد العقديّة في الهندسة . الوحدة 5 . الدرس 2

في المسألة عندك نقاط وأعدادها، والسؤال يطلب طولاً، أو زاوية، أو إثبات أنّ مستقيمين متعامدان. الجميل في هذا الدرس أنّ الجواب يخرج كلّه من الفروق. المسافة AB هي طويلة فرق واحد $z_B - z_A$ ، وزاوية هذا الفرق تعطي ميل الشعاع. أمّا بين شعاعين فنحسب كسراً بين فرقين ونقرؤه قراءتين: طويلته تقول كم مرّة تكبر إحدى القطعتين عن الأخرى، وزاويته تقول بأيّ ميل. ومن هذه القراءات تخرج المسافة والزاوية والاستقامة والتعامد ومجموعات النقاط.

المسافة من فرق عددين

في الدرس السابق ربطنا كل شعاع بعدد عقدي، ورأينا أنّ الشعاع $\overrightarrow{AB}$ يمثّله العدد $z_B - z_A$ ، أي عدد النهاية ناقص عدد البداية. الآن نسأل السؤال الذي تعيش عليه المسائل: ماذا يعطينا هذا العدد بالضبط؟

نتبع طريق الكتاب. لتكن M النقطة التي تحقّق $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ ، أي الشعاع نفسه منقولاً إلى المبدأ. تساوي شعاعين يكافئ تساوي العددين الممثّلين لهما، إذن العدد الممثّل للنقطة M هو $z_M = z_B - z_A$.



الشعاعان متساويان، فالقطعتان متساويتان في الطول: $OM = AB$. النقطة M تمثّلها $z_B - z_A$.

طويلة العدد z_M هي بُعد M عن المبدأ، أي OM . وبما أنّ الشعاعين متساويان فإنّ $OM = AB$ ، فنحصل على أوّل نتيجة في الدرس:

$$AB = |z_B - z_A|$$

تذكّر: الطويلة تحوّل فرق عددين إلى مسافة. الفرق $z_B - z_A$ عدد عقدي، أمّا $|z_B - z_A|$ فعدد حقيقي موجب، وهو طول القطعة $[AB]$.

انتبه: لا تكتب $AB = z_B - z_A$. المسافة لا تكون عقدية ولا سالبة. وفي $\mathbb{C}$ لا نقارن الأعداد نفسها، نقارن طويلاتها فقط، فعلامة الطويلة ليست زينة.

النقطتان A و B في الشكل أعلاه يمثّلهما $z_A = 1 + 3i$ و $z_B = 4 + 2i$. ما AB ؟

أ) $3 - i$

ب) $\sqrt{10}$

ج) 10

ب. صحيح. $z_B - z_A = 3 - i$ ، وطويلته $\sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$.

الزاوية مع الاتّجاه الموجب

الطويلة أعطتنا الطول. وماذا تعطينا الزاوية؟ الشعاع $\overrightarrow{OM}$ يصنع مع u زاوية، وهذه بالتعريف زاوية العدد z_M . وما دام $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ ، فالزاوية نفسها تصلح للشعاع $\overrightarrow{AB}$.

بشرط أن يكون الشعاع غير معدوم، أي $z_A \neq z_B$ ، نكتب:

$$(u, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$$

المسافة والزاوية

$AB = |z_B - z_A|$ طول القطعة $[AB]$ ، وهو عدد حقيقي موجب.

$(u, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$ زاوية الشعاع مع الاتّجاه الموجب، ويُشترط $z_A \neq z_B$ لأنّ الشعاع المعدوم لا اتّجاه له.

الكتاب، الصفحة 115

انتبه: الترتيب $z_B - z_A$ لا يُقلب. في المسافة لا يضرّ القلب، لأنّ $|z_A - z_B| = |z_B - z_A|$. أمّا في الزاوية فالقلب يعطي الشعاع المعاكس ويزيد الزاوية π . النهاية أوّلاً، ثمّ البداية.

خارج القسمة يقول النسبة والزاوية

المسائل نادراً ما تسأل عن زاوية شعاع مع u . تسأل عن الزاوية بين شعاعين، أي $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$. وهنا تظهر الفكرة التي تحمل الوحدة كلّها.

نستند إلى علاقة شال في الزوايا الموجّهة، ونمرّ بـ u وسيطاً:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) &= (\overrightarrow{AB}, u) + (u, \overrightarrow{CD}) \\ &= (u, \overrightarrow{CD}) - (u, \overrightarrow{AB}) \\ &= \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A)\end{aligned}$$

وفرق زاويتين هو زاوية خارج القسمة، لأنّ القسمة تطرح الزوايا كما رأينا في الوحدة السابقة. إذن كل الزاوية المطلوبة تسكن في كسر واحد:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

مبرهنة 3: زاوية شعاعين

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$ لأربع نقاط تحقّق $z_A \neq z_B$ و $z_C \neq z_D$.

$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right)$ ملاحظة الكتاب لثلاث نقاط متباينة $M(z)$ و $A(a)$ و $B(b)$. لاحظ أنّ الكتاب يختصر هنا فيكتب a بدل z_A .

الكتاب، الصفحة 115

ولماذا نحسب هذا الكسر أصلاً؟ لأنّه يحمل جوابين في عدد واحد. زاويته هي الزاوية بين الشعاعين كما رأينا، وطويلته هي نسبة الطولين:

$$\left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right| = \frac{CD}{AB}$$

تذكّر: عدد واحد، قراءتان: الطويلة تقول كم مرّة، والزاوية تقول بأيّ ميل. من فهم هذه الجملة استغنى عن حفظ بقيّة الدرس.

انتبه: المقام يخصّ الشعاع الأوّل والبسط يخصّ الثاني. لو قلبت الكسر لحصلت على $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB})$ ، أي الزاوية نفسها بإشارة معاكسة، والنتيجة تنقلب معك في الامتحان.

استقامة أم تعامد

نقرأ الآن حالتين خاصّتين من الزاوية، وهما أكثر ما يُسأل عنه في الامتحان.

إذا كانت الزاوية 0 أو π ، فالشعاعان على المنحى نفسه أو على منحيين متعاكسين، أي مرتبطان خطّياً، والمستقيمان (AB) و (CD) متوازيان أو منطبقان. وزاوية عدد تساوي 0 أو π تعني بالضبط أنّ العدد حقيقي غير معدوم.

وإذا كانت الزاوية $\frac{\pi}{2}$ أو $-\frac{\pi}{2}$ ، فالشعاعان متعامدان، وهذا يكافئ أن يكون الكسر تخيّلياً بحتاً.

قراءتان لخارج القسمة

$\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$ نسمّي θ زاوية خارج القسمة.

$\theta = \pi$ $\theta = 0$ في الحالتين الشعاعان مرتبطان خطّياً، والكسر عدد حقيقي غير معدوم.

$\theta = -\frac{\pi}{2}$ $\theta = \frac{\pi}{2}$ في الحالتين الشعاعان متعامدان، والكسر عدد تخيّلي بحت.

الكتاب، الصفحة 116

ولإثبات وقوع ثلاث نقاط متباينة A و B و C على استقامة واحدة نختار الشعاعين من النقطة نفسها، فيصير الشرط قصيراً: إذا كان $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ عدداً حقيقياً غير معدوم، فالنقاط الثلاث على استقامة واحدة.

تذكّر: الاختصار العملي: كسر حقيقي بين شعاعين ينطلقان من النقطة نفسها يعني وقوع النقاط على استقامة واحدة، وبين شعاعين على مستقيمين يعني توازي المستقيمين، وكسر تخيّلي بحت يعني التعامد في الحالتين.

النقاط A و B و C متباينة، ووجدنا $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -2$. ماذا نستنتج؟

أ) المستقيمان (AB) و (AC) متعامدان

ب) $AC = 2\,AB$ وهذا كل ما نعرفه

ج) النقاط الثلاث على استقامة واحدة

ج. صحيح. الكسر حقيقي غير معدوم، فزاويته 0 أو π ، والشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطّياً وينطلقان من A .

مثال الكتاب: مثلّثان قائمان

نطبّق الآن على مثال الكتاب بأعداده. لاحظ أنّ الكتاب يكتب هنا a و b و c و d بدل z_A و z_B و z_C و z_D . الاختصار نفسه تجده في أسئلة الامتحان، والمقصود واحد.

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس، النقاط A و B و C و D تمثّلها الأعداد الآتية بالترتيب. أثبت أنّ المثلّثين ACD و BCD قائمان.

$$a = -2 \quad b = 2 \quad c = -1 + i \quad d = 1 - 3i$$

1. نختار الشعاعين ونكتب الكسر الزاوية المطلوبة في المثلّث BCD هي عند الرأس B ، أي بين $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BD}$. المقام للشعاع الأوّل والبسط للثاني.

$$Z = \frac{d - b}{c - b}$$

2. نعوّض ونبسّط نطرح أوّلاً، ثمّ نضرب البسط والمقام بمرافق المقام كما تعلّمنا في الوحدة السابقة. المقام يصير $9 + 1 = 10$.

$$Z = \frac{-1 - 3i}{-3 + i} = \frac{(-1 - 3i)(-3 - i)}{10} = i$$

3. نقرأ الطويلة طويلة i تساوي 1 ، وهي نسبة الطولين $\frac{BD}{BC}$. إذن الضلعان متساويان.

$$|Z| = 1 \qquad BD = BC$$

4. نقرأ الزاوية وزاوية i هي $\frac{\pi}{2}$ ، وهي قياس $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$. إذن الزاوية عند B قائمة.

$$\arg Z = \frac{\pi}{2} \qquad (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{2}$$

5. نستنتج نوع المثلّث الأوّل ساقان متساويان وزاوية قائمة بينهما: المثلّث BCD قائم ومتساوي الساقين في B . لاحظ أنّ الجوابين خرجا من العدد نفسه.

6. نكرّر العمل عند الرأس A الآن الشعاعان $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$. نحسب الكسر بالطريقة نفسها، والمقام $1+1=2$.

$$Z' = \frac{d-a}{c-a} = \frac{3-3i}{1+i} = \frac{3(1-i)(1-i)}{2} = -3i$$

7. نقرأ ونستنتج الطويلة 3 تقول $AD = 3\,AC$ ، فالساقان غير متساويين. والزاوية $-\frac{\pi}{2}$ تقول إنّ الزاوية عند A قائمة. إذن ACD قائم في A وليس متساوي الساقين.

$$|Z'| = 3 \qquad \arg Z' = -\frac{\pi}{2}$$

من كسر واحد جوابان: الطويلة تحكم على الأضلاع، والزاوية تحكم على الزاوية. لا تحكم على نوع المثلّث بواحدة منهما وحدها.

$$\left|\frac{d-b}{c-b}\right| = \frac{BD}{BC} \qquad \arg\left(\frac{d-b}{c-b}\right) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$$

انتبه: الإشارة السالبة في $-\frac{\pi}{2}$ ليست خطأً يجب إصلاحه. هي تقول في أي جهة تدور الزاوية. للتعامد يكفي $\frac{\pi}{2}$ أو $-\frac{\pi}{2}$ ، والاثنتان مقبولتان.

مجموعتان تُقرآن من الطويلة

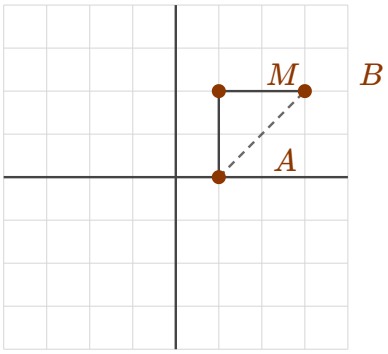
بقيت قراءة أخيرة للطويلة، وهي التي تنتج مجموعات نقاط. تذكّر فقط أنّ $|z-\omega|$ هو البعد بين النقطة $M(z)$ والنقطة $\Omega(\omega)$ ، لا أكثر.

فإذا ثبّتنا هذا البعد عند قيمة r موجبة تماماً، جمعنا كل النقاط التي تبعد r عن Ω ، وهذه هي الدائرة:

$$|z-\omega| = r$$

وإذا طلبنا أن تبعد M المسافة نفسها عن نقطتين مختلفتين $A(a)$ و $B(b)$ ، أي $MA = MB$ ، حصلنا على محور القطعة المستقيمة $[AB]$. وهذا المحور يمرّ بمنتصف $[AB]$ ، والعدد الممثّل للمنتصف هو $\frac{a+b}{2}$ كما رأينا في الدرس السابق.

$$|z-a| = |z-b|$$



بأعداد تمرين الكتاب $a = 1$ و $b = 3 + 2i$: النقطة $M(1 + 2i)$ تحقّق $MA = MB = 2$ ، فهي على محور القطعة $[AB]$.

مجموعتا نقاط

الدائرة التي مركزها $\Omega(\omega)$ ونصف قطرها r ، مع $r > 0$. فالشرط يكافئ $\Omega M = r$. $|z - \omega| = r$

محور القطعة المستقيمة $[AB]$ ، مع $a \neq b$. فالشرط يكافئ $MA = MB$. $|z - a| = |z - b|$

الكتاب، الصفحة 116

انتبه: انتبه للإشارة داخل الطويلة. الشرط $|z + 2i| = 3$ ليس مركزه $2i$. أعد كتابته على الصورة $|z - \omega|$ أوّلاً، فتقرأ $|z - (-2i)| = 3$ ، والمركز $-2i$.

ما مجموعة النقاط $M(z)$ التي تحقّق الشرط الآتي؟

$$|z - 3 - 2i| = 1$$

أ) الدائرة التي مركزها $3 + 2i$ ونصف قطرها 1

ب) الدائرة التي مركزها $-3 - 2i$ ونصف قطرها 1

ج) محور القطعة التي طرفاها $3 + 2i$ و 1

أ. صحيح. الشرط مكتوب على الصورة $|z - \omega| = r$ مع $\omega = 3 + 2i$ و $r = 1$.

تذكّر: كل الدرس في سطر: $|z_B - z_A|$ مسافة، و $\arg(z_B - z_A)$ اتّجاه، وخارج القسمة يعطي نسبة الطولين والزاوية معاً ليحكم على الاستقامة والتعامد ونوع المثلّث.

المصدر: الرياضيات، الجزء الثاني، الصفحات 115 إلى 118 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.