بسيطة

الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

التكامل المحدّد وخواصّه

الرمز الجديد ليس مساحةً بل فرقُ قيمتين، وأربع خواصّ تختصر الحساب كلّه

التكامل والتوابع الأصليّة . الوحدة 7 . الدرس 3

لعلّك سمعت أنّ التكامل مساحة. هذا يصحّ بشروط، وستراها في الدرس التالي، ولن تجد منه هنا شيئاً: الكتاب يعرّف التكامل المحدّد بالتابع الأصليّ وحده، فرقَ قيمتين لا أكثر، ولا يذكر المساحة ولا يرسم شكلاً واحداً. تأتي المساحة في الدرس التالي. والمكسب من هذا الترتيب فوريّ: كلّ ما بنيته في الدرسين السابقين يصير أداةَ حساب من السطر الأوّل. هذا أطول دروس الوحدة وأكثفها، وفيه تعريفٌ واحد، وأربع خواصّ، وطريقتان لما لا يكفي فيه الجدولان.

تعريفٌ بلا مساحة

الرمز $\int$ جديدٌ عليك في هذه الوحدة: لم يرد في درسَيها السابقين ولا مرّة، لا عندنا ولا في صفحات الكتاب التي يقابلانها. وما يخفيه أبسط ممّا يوحي به شكله: خذ تابعاً أصليّاً، عوّض بالحدّ الأعلى، عوّض بالحدّ الأدنى، اطرح. هذا كلّ شيء. لا مساحة، ولا مجموع، ولا نهاية. وحين تأتي المساحة، ستكون نتيجةً لهذا التعريف لا مصدرَه.

مبرهنة وتعريف 4

الفرض: ليكن f تابعاً مستمرّاً على مجال I ، وليكن F أحد توابعه الأصليّة على هذا المجال، وليكن a و b عددين من I . عندئذٍ:

العدد $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ لا يتعلّق بالتابع الأصليّ المختار. نسمّيه التكامل المحدّد للتابع f من a إلى b . لاحظ الترتيب: الأعلى أوّلاً.

المتحوّل داخل التكامل مقيَّد: تغيير اسمه لا يغيّر العدد. ولذلك تُختصر الكتابة إلى $\int_a^b f$ عند عدم الحاجة إلى ذكر الصيغة. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f$

الكتاب، الصفحة 208

كلمةٌ عن الرمز $[F(x)]_a^b$ ، لأنّ الكتاب يستعمله من أوّل سطر ولا يعرّفه أبداً. هو اختصارٌ خالص ولا يحمل معنًى إضافيّاً: $[F(x)]_a^b$ تعني $F(b) - F(a)$ ، لا أكثر. وستجده في الكتاب بصيغتين، مع المتحوّل ومن دونه، $[F(x)]_a^b$ و $[F]_a^b$ ، وكلاهما الشيء نفسه.

التعريف يَعِد بشيءٍ يحتاج إثباتاً قبل أن يصير تعريفاً: أنّ العدد نفسه يخرج مهما اخترت من التوابع الأصليّة. لو تعلّق بالاختيار لما كان تعريفاً لشيء. أثبت أنّ الاختيار لا يؤثّر.

$$[G(x)]_a^b = [F(x)]_a^b$$

1. من أين يأتي الثابت ليكن G تابعاً أصليّاً آخر للتابع f على I . هنا يدخل الدرس الأوّل: المبرهنة 1 ② تقول إنّ كلّ تابعٍ أصليّ آخر يختلف عن F بثابت. الكتاب يستعمل هذه الخطوة ولا يذكرها؛ وهي صحيحةٌ لأنّ I مجال، ولو لم يكن مجالاً لسقطت.

$$G(x) = F(x) + k$$

2. الحساب، والثابت يسقط نعوّض في الفرق عند الحدّين. الثابت k يظهر مرّتين بالإشارة نفسها، فيختصر من تلقاء نفسه. هذا هو كلّ البرهان.

$$\begin{aligned}[G(x)]_a^b &= G(b) - G(a) \\ &= (F(b) + k) \\ &\quad - (F(a) + k) \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

3. الخلاصة فالعدد واحدٌ مهما اخترت. ولذلك يجوز اعتماده تعريفاً، ولذلك أيضاً لا تحتاج في أيّ حساب إلى السؤال «أيّ تابعٍ أصليّ آخذ؟»: خذ أبسطها، وأسقِط الثابت من البداية.

$$[G(x)]_a^b = [F(x)]_a^b$$

في حساب التكامل المحدّد لا تكتب $+\,k$ أبداً. الثابت الذي كان جزءاً من الجواب في الدرس الأوّل يسقط هنا في كلّ مرّة، لأنّ الفرق يأكله. هذا أوّل فرقٍ عمليّ بين تابعٍ أصليّ وتكاملٍ محدّد.

$$[F(x) + k]_a^b = [F(x)]_a^b$$

انتبه: الترتيب ليس تفصيلاً: التعريف هو $F(b) - F(a)$ ، الحدّ الأعلى أوّلاً. من يكتب $F(a) - F(b)$ يحصل على العدد المعاكس، وهو خطأٌ لا يُصلحه شيءٌ لاحق. والفخّ أنّ الغلط لا يظهر في الحسابات التي تعطي صفراً، ولا في أيّ حساب حتّى تصل إلى الجواب النهائيّ.

مثال، أربعة تكاملات محسوبة

$$\int_{-1}^{2}(2x-1)\,dx = \left[x^2-x\right]_{-1}^{2} = (4-2)-(1+1) = 0$$

كثير حدود، حدّاً حدّاً بالجدول الأوّل. ولاحظ: التكامل ينعدم من دون أن ينعدم التابع.

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}}\cos 2x\,dx = \left[\tfrac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

سطر $g(ax+b)$ من الدرس السابق: العامل $\frac{1}{2}$ هو $\frac{1}{a}$ ولا يُنسى.

$$\int_{2}^{4}\frac{3}{x-1}\,dx = \left[3\ln(x-1)\right]_{2}^{4} = 3\ln 3 - 3\ln 1 = 3\ln 3$$

النمط $\frac{u'}{u}$. والفرع $\ln(x-1)$ صحيحٌ لأنّ $x-1>0$ على $[2,\,4]$؛ الكتاب لا يذكر هذا التبرير هنا، ويذكره في مثالٍ لاحق.

$$\int_{0}^{1}2x\,e^{x^2}\,dx = \left[e^{x^2}\right]_{0}^{1} = e^1-e^0 = e-1$$

النمط $u'e^u$ مع $u(x)=x^2$، والعامل $2x$ موجودٌ كاملاً.

الكتاب، الصفحة 209

أيّ العبارات الآتية صحيحة عن $\int_a^b f(x)\,dx$ ؟

أ) قيمته تتغيّر بتغيّر التابع الأصليّ المختار

ب) قيمته لا تتغيّر بتغيّر التابع الأصليّ، ولا بتغيّر اسم المتحوّل

ج) قيمته تتغيّر بتغيّر اسم المتحوّل، فـ $\int_a^b f(x)\,dx$ غير $\int_a^b f(t)\,dt$

ب. نعم، الاثنان معاً. الأوّل مبرهنٌ عليه في الدرس، والثاني هو معنى أنّ المتحوّل مقيَّد: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$.

ثلاث خواصّ، وعلاقة شال

الخواصّ الآتية كلّها تخرج من التعريف في سطر، لأنّ التعريف فرقُ قيمتين، والفرق يوزّع على الجمع ويُخرج العامل الثابت. لا تحفظها كقائمة جديدة؛ اقرأ الأوليَين على أنّهما المبرهنة 3 من الدرس السابق، وقد رأيتَ هناك أنّ الجمع والضرب بعددٍ يمرّان في التوابع الأصليّة. لا يسمّي نصّ الدرس هذه المجموعة «خطّيّة»، لكنّ الكتاب يستعمل الكلمة في صفحة خلاصة الوحدة: «التكامل المحدّد خطّيّ». فاعرف الاسم، ولا تنتظره في موضعه الطبيعيّ.

مبرهنة 5

الفرض: ليكن f و g تابعين مستمرّين على مجال I ، وليكن a و b عددين من I ، و λ عدداً حقيقيّاً. عندئذٍ:

① $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ الجمع يمرّ. والسبب في سطر: إن كان F و G تابعين أصليّين لـ f و g ، كان $F+G$ تابعاً أصليّاً لـ $f+g$.

② $\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f$ العامل الثابت يخرج. الكتاب يترك برهانها تمريناً للقارئ، وهي مثل ① تماماً.

③ $\int_b^a f = -\int_a^b f$ تبديل الحدّين يقلب الإشارة، لأنّ $F(a)-F(b)$ معاكس $F(b)-F(a)$. برهانها متروكٌ للقارئ مثل ②، لكنّها تزيد عليها بأنّها لا تظهر في أيّ مثالٍ من الدرس.

الكتاب، الصفحة 209

تذكّر: من ③ مع $b=a$ تخرج نتيجةٌ لا يكتبها الكتاب في أيّ سطرٍ من هذا الدرس: $\int_a^a f = -\int_a^a f$ ، فالعدد يساوي معاكسه، إذن هو صفر. تكاملٌ حدّاه متساويان يساوي صفراً دائماً، أيّاً كان التابع.

مبرهنة 6، علاقة شال

$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$ بفرض أنّ f مستمرٌّ على مجال I ، وأنّ a و b و c ثلاثة أعداد منه. البرهان سطران: المجموع هو $F(c)-F(a)$ زائد $F(b)-F(c)$ ، والمقدار $F(c)$ يظهر مرّتين بإشارتين متعاكستين فيختصر، ويبقى $F(b)-F(a)$.

$c \in I$ الشرط الوحيد على c أن يكون من المجال I . لاحظ أنّ المبرهنة لا تطلب أن يقع بين a و b . وهذا يتّسق مع ③: الحدّان قد ينقلبان، والإشارة تتكفّل بالباقي.

الكتاب، الصفحة 210

تذكّر: الخاصّة ① هي أثقل ما في هذا الدرس وزناً في البكالوريا، وليس بصيغتها المجرّدة بل في قالبٍ واحد يتكرّر: يُعطى تكاملان I و J ، ويُطلب حساب $I+J$ لأنّ حدوده تختصر فيصير تكاملاً بسيطاً، ثمّ استنتاج J بالطرح. في سلالم التصحيح التي قرأناها حمل هذا القالب وحده خمساً وثلاثين درجة من ستّين في دورةٍ، وعشرين من أربعين في أخرى. إن تدرّبت على نمطٍ واحد من هذا الدرس، فليكن هذا.

علاقة شال ليست زينة نظريّة، وهذا أوّل موضعٍ تُستعمل فيه فعلاً. احسب التكامل المحدّد، وانتبه إلى القيمة المطلقة، فهذه أوّل مرّة تصادفها داخل تكامل.

$$I = \int_0^2 \left| x^2 - 1 \right| \, dx$$

1. أين تنقلب الإشارة القيمة المطلقة ليست تابعاً من الجدول، فلا بدّ من إزالتها أوّلاً. ندرس إشارة ما بداخلها على مجال التكامل: x^2-1 سالبٌ أو معدوم على $[0,\,1]$ وموجبٌ أو معدوم على $[1,\,2]$. والصفر الفاصل هو 1.

$$\forall x\in[0,\,1]:\ x^2-1\le 0$$
$$\forall x\in[1,\,2]:\ x^2-1\ge 0$$

2. القطع عند الصفر الفاصل هنا تدخل علاقة شال: نقطع التكامل عند 1، وعلى كلّ قطعةٍ نستبدل القيمة المطلقة بتعبيرٍ عاديّ حسب إشارته.

$$I=\int_0^1 \left(1-x^2\right)\,dx + \int_1^2 \left(x^2-1\right)\,dx$$

3. حسابان عاديّان التابعان الآن كثيرا حدود، والجدول الأوّل يكفي. الأوّل يعطي $\frac{2}{3}$، والثاني $\frac{4}{3}$.

$$I=\left[x-\tfrac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[\tfrac{x^3}{3}-x\right]_1^2 = \tfrac{2}{3}+\tfrac{4}{3}=2$$

قيمةٌ مطلقة داخل تكامل تعني دائماً ثلاث حركات بهذا الترتيب: ادرس الإشارة، اقطع عند كلّ صفر يقع داخل مجال التكامل، ثمّ احسب كلّ قطعةٍ وحدها. ولا تُخرِج القيمة المطلقة من التكامل.

$$\int_a^b |f| = \int_a^c |f| + \int_c^b |f|$$

علمنا أنّ $\int_0^3 f=7$ و $\int_0^1 f=2$. ما قيمة $\int_3^1 f$ ؟

أ) -5

ب) 5

ج) 9

أ. نعم، وهما حركتان لا واحدة. بعلاقة شال $\int_1^3 f=\int_0^3 f-\int_0^1 f=5$، ثمّ تبديل الحدّين يقلب الإشارة.

التكامل بالتجزئة

الجدولان لا يعطيان تابعاً أصليّاً لجداء تابعين، ولا قاعدة عامّة لذلك. لكنّ الاشتقاق يعطي قاعدةً للجداء، وهذا الدرس كلّه قراءةٌ بالمقلوب. اقرأ $(uv)'=u'v+uv'$ بالمقلوب فتجد: uv تابعٌ أصليّ للمجموع $u'v+uv'$. ومن هذه الجملة

الواحدة تخرج الطريقة: لا تحسب التكامل المطلوب مباشرةً، بل بدّله بتكاملٍ آخر تظهر فيه u' بدل u ، على أمل أن يكون الثاني أسهل.

مبرهنة 7

الفرض: نتأمّل تابعين u و v قابلين للاشتقاق على مجال I ، ونفترض أنّ المشتقّين u' و v' مستمرّان على I . عندئذٍ أيّاً كان العددان a و b من I : $a,\ b \in I$

لاحظ الإشارة السالبة وموضع الشرطة: على اليمين يُشتقّ u ويبقى v ، أي أنّ الشرطة انتقلت من v إلى u . البرهان يستند صراحةً إلى المبرهنة 5 ، لأنّه يفصل تكامل المجموع إلى مجموع تكاملين. $\int_a^b u\,v' = [u\,v]_a^b - \int_a^b u'\,v$

الكتاب، الصفحة 211

أوّل مثالَي الكتاب على هذه الطريقة، وهو القالب الذي تُبنى عليه أكثر مسائل البكالوريا. احسب التكامل المحدّد.

$$I = \int_0^1 x\,e^{-x}\,dx$$

1. من يُشتقّ ومن يُكامَل القاعدة العمليّة التي يكتبها الكتاب صراحةً: عند جداء كثير حدود في تابعٍ أُسّي، اجعل كثير الحدود هو u ، لأنّ اشتقاقه يخفّض درجته حتّى تختفي. والعامل الآخر هو v' ، لأنّ التابع الأُسّي لا يزداد صعوبةً بالمكاملة.

$$\begin{array}{c|c} u(x) = x & v'(x) = e^{-x} \\ \hline u'(x) = 1 & v(x) = -e^{-x} \end{array}$$

2. تطبيق الصيغة نضع في مكانها. الحدّ الأوّل قوسٌ يُحسب بالتعويض، والثاني تكاملٌ جديد أبسط من الأصل: اختفى x تماماً.

$$I = \left[x\left(-e^{-x}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-e^{-x}\right) dx$$

3. الحسابان القوس عند 1 يعطي $-e^{-1}$ وعند 0 يعطي صفراً. والتكامل الثاني تابعٌ أُسّيّ صرف، وإشارتاه السالبتان تُصبحان جمعاً.

$$\begin{aligned} I &= -e^{-1} - \left[e^{-x}\right]_0^1 \\ &= -e^{-1} - \left(e^{-1} - 1\right) \\ &= 1 - 2e^{-1} = \frac{e-2}{e} \end{aligned}$$

الخطأ الأكثر تكراراً هنا هو تبادل الدورين. المِعيار ليس الذوق: يُشتقّ التابع الذي يصير أبسط بالاشتقاق، وهو كثير الحدود أو اللوغاريتم؛ ويُكامَل التابع الذي لا يزداد صعوبة، وهو الأُسّي أو الجيب أو التجيب. إن ازداد التكامل الجديد تعقيداً، فقد بدّلت الدورين.

$$u \longrightarrow u' \qquad v' \longrightarrow v$$

والآن استعمالٌ مقلوب للتكامل: بدل أن نستعمل التابع الأصليّ لحساب تكامل، نستعمل التكامل لإيجاد تابعٍ أصليّ. الكتاب يذكر في أوّل الدرس أنّ $x \mapsto \int_a^x f$ تابعٌ أصليّ للتابع f ، ثمّ يستفيد منه هنا. عيّن تابعاً أصليّاً للتابع $f : x \mapsto \ln x$ على $]0, +\infty[$.

$$F(x) = \int_1^x \ln t \, dt$$

1. لماذا يجوز هذا أصلاً جملتان تسنِدان هذه الكتابة، والكتاب يذكرهما ولا يبرهنهما. الأولى: $\ln$ مستمرٌّ على $]0, +\infty[$ ، فله تابعٌ أصليّ بالمبرهنة 2 من الدرس الأوّل. والثانية: إذا كان f مستمرّاً على مجال I و a عدداً منه، كان $x \mapsto \int_a^x f$ هو التابع الأصليّ الذي ينعدم عند a . نختار $a = 1$ ، وأيّ عددٍ من المجال يصلح.

$$F(x) = \int_1^x \ln t \, dt$$

2. التجزئة بالحيلة المعاكسة لا يوجد هنا جداء ظاهر، فنصطنع واحداً: نكتب $\ln t$ على أنّه $\ln t \times 1$. ثمّ نجعل اللوغاريتم هو u ، لأنّ اشتقاقه يعطي كسراً بسيطاً، والعامل 1 هو v' .

$$\begin{array}{c|c} u(t) = \ln t & v'(t) = 1 \\ \hline u'(t) = \dfrac{1}{t} & v(t) = t \end{array}$$

3. الاختصار الذي يحلّ كلّ شيء في التكامل الثاني يظهر الجداء $t \times \dfrac{1}{t}$ ويساوي 1 . فيصير تكاملاً لثابت، وهو أبسط ما يكون.

$$\begin{aligned} F(x) &= [t \ln t]_1^x - \int_1^x t \cdot \frac{1}{t} \, dt \\ &= x \ln x - \int_1^x dt = x \ln x - x + 1 \end{aligned}$$

4. الجواب، وحرّيّة الثابت الناتج تابعٌ أصليّ، والحدّ $+1$ ثابتٌ يجوز إسقاطه ما دام المطلوب «تابعاً أصليّاً» لا «التابع الأصليّ الذي ينعدم عند 1 ». الكتاب يُسقطه من دون أن يقول لماذا؛ السبب هو المبرهنة 1 ① من الدرس الأوّل. والتحقّق فوريّ بالاشتقاق.

$$x \longmapsto x \ln x - x$$

متى واجهت تابعاً لا جداء فيه وأردت مكاملته بالتجزئة، اضربه بـ 1 واجعل الواحد هو v' . هذه الحيلة تعطي تابعاً أصليّاً لـ $\ln$ في سطرين، وهي الطريق الذي يسلكه الكتاب في هذا الموضع.

$$\int_a^b \ln t \, dt = \left[t \ln t - t \right]_a^b$$

لحساب $\int_0^1 x\, e^{2x}\, dx$ بالتجزئة، ماذا نختار؟

أ) $u(x) = e^{2x}$ و $v'(x) = x$

ب) لا حاجة إلى التجزئة، فالتابع الأصليّ للجداء هو جداء التابعين الأصليّين

ج) $u(x) = x$ و $v'(x) = e^{2x}$

ج. نعم. اشتقاق x يعطي 1 فيختفي كثير الحدود، ومكاملة e^{2x} تعطي $\frac{1}{2}e^{2x}$ وهي بالصعوبة نفسها. التكامل الثاني يصير أُسّيّاً صرفاً.

التوابع الكسريّة

بقيت حالةٌ واحدة يعالجها الكتاب: الكسر الذي مقامه من الدرجة الثانية. والفكرة ليست جديدة، بل هي الفكرة نفسها التي تقود الدرس كلّه: أعِد التابع إلى مجموع أشياء تعرفها. هنا تكون الأشياء المعروفة كسوراً مقاماتها من الدرجة الأولى، وكلٌّ منها من النمط $\frac{u'}{u}$. الكتاب يضيّق الميدان عمداً، ويقول بأيّ حدود يعمل.

الإطار، والحالتان

الإطار: $f(x)=\dfrac{A(x)}{B(x)}$ A كثير حدود، و B كثير حدود من الدرجة الثانية، واحديٌّ أي حدّه المسيطر x^2 ، $B(x)=(x-r_1)(x-r_2)$ وله صفران حقيقيّان مختلفان r_1 و r_2 . والحدّان a و b من مجالٍ واحد لا يحوي r_1 ولا r_2 . وإن لم يكن المقام واحديّاً، اقسم البسط والمقام على معامل x^2 أوّلاً، فيعود إلى الإطار.

الحالة الأولى، $\deg A\le 1$: نبحث عن ثابتين. التعويض بـ $x=r_1$ يُلغي الحدّ الأوّل فيعطي μ ، والتعويض بـ $x=r_2$ يعطي λ . انتبه إلى التبادل، فهو معكوس ما يتوقّعه أكثر الطلّاب. $A(x)=\lambda(x-r_1)+\mu(x-r_2)$

وبالاختصار يصير الكسر مجموع كسرين مألوفين، وتكامل كلٍّ منهما لوغاريتم. لا تنسَ فحص إشارة كلّ مقام على مجال التكامل لاختيار الفرع. $f(x)=\frac{\lambda}{x-r_2}+\frac{\mu}{x-r_1}$

الحالة الثانية، $\deg A\ge 2$: قسمة إقليديّة أوّلاً. فيصير $f=Q+\dfrac{R}{B}$ ، وتكامل Q يسيرٌ لأنّه كثير حدود، والباقي يعود إلى الحالة الأولى. $\begin{aligned}A(x)&=Q(x)\,B(x)+R(x)\\ \deg R&\le 1\end{aligned}$

الكتاب، الصفحة 212

مثال الكتاب على الحالة الأولى، وفيه القالب كاملاً. احسب التكامل المحدّد.

$$I=\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2-x-2}$$

1. حلّل المقام أوّلاً قبل أيّ شيء: هل المقام من الشكل المطلوب؟ نجد صفريه ونكتبه جداءً. الصفران -1 و 2 مختلفان، فالإطار ينطبق. والتابع مستمرٌّ على $[0,\,1]$ لأنّ الصفرين خارجه.

$$x^2-x-2=(x+1)(x-2)$$

2. عيّن الثابتين نكتب البسط، وهو 1 ، بدلالة القوسين، ثمّ نعوّض بكلّ صفرٍ على حدة. التعويض بـ -1 يُلغي القوس الأوّل ويعطي μ ، والتعويض بـ 2 يعطي λ .

$$\begin{aligned}1&=\lambda(x+1)+\mu(x-2)\\ \mu&=-\tfrac{1}{3},\quad \lambda=\tfrac{1}{3}\end{aligned}$$

3. الكسر يصير مجموعاً نعوّض ونختصر، فينفصل الكسر إلى حدّين مقاماهما من الدرجة الأولى. كلٌّ منهما الآن من النمط $\dfrac{u'}{u}$ مضروباً بعدد.

$$f(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}$$

4. افحص الإشارتين قبل اللوغاريتم هذه هي الخطوة التي تُخسر فيها الإشارة. على $[0,\,1]$ يكون $x+1>0$ ، فالفرع $\ln(x+1)$ ؛ ويكون $x-2<0$ ، فالفرع $\ln(2-x)$ لا $\ln(x-2)$.

$$\begin{aligned} I &= \tfrac{1}{3}\left[\ln(2-x)\right]_0^1 - \tfrac{1}{3}\left[\ln(x+1)\right]_0^1 \\ &= \tfrac{1}{3}\left(-\ln 2\right) - \tfrac{1}{3}\ln 2 = -\tfrac{2}{3}\ln 2 \end{aligned}$$

الترتيب واحدٌ في كلّ مسألةٍ كسريّة: حلّل المقام، قارن الدرجتين واقسم إن لزم، عيّن الثابتين بالتعويض بالصفرين، ثمّ افحص إشارة كلّ مقام على مجال التكامل قبل كتابة أيّ لوغاريتم. من يقفز إلى اللوغاريتم مباشرةً يخسر الإشارة.

$$\begin{aligned} x-r>0 &\longrightarrow \ln(x-r) \\ x-r<0 &\longrightarrow \ln(r-x) \end{aligned}$$

انتبه: لا تُشهر الطريقة قبل أن تنظر. الإطار يشترط صفرين حقيقيّين مختلفين، والكلمة الأخيرة هي المهمّة: ومن يبحث عن ثابتين λ و μ على مقامٍ له صفرٌ مضاعف لا يصل إلى شيء: المعادلتان تتناقضان. والكتاب نفسه يضع في آخر تمارينه $f(x)=\dfrac{2x-1}{(x+2)^2}$ ، ثمّ يعلّق بجملةٍ واحدة: «التكامل الأخير ليس من النوع الذي درسناه بل هو أبسط من ذلك». وهو محقّ: من $2x-1=2(x+2)-5$ يأتي $f(x)=\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{5}{(x+2)^2}$ ، والحدّان كلاهما سطرٌ جاهز في الجدول الثاني من الدرس السابق، $\dfrac{u'}{u}$ و $u'u^n$ مع $n=-2$. سطرٌ واحد بدل جملة معادلات.

تذكّر: وكلمةٌ عن وزن هذا الدرس. الطريقتان ليستا متساويتين في البكالوريا: النمطان اللذان يتكرّران فعلاً هما $\dfrac{u'}{u}$ و $u'u^n$ ، وقبل ذلك كلّه: كلّ سلّم تصحيحٍ قرأناه يجزّئ درجة التكامل الواحدة إلى ثلاث درجاتٍ منفصلة، للتابع الأصليّ، وللتعويض بالحدّين، وللناتج. اكتب الخطوات الثلاث ولو أخطأت في الأخيرة، فالدرجتان الأوليان لا تسقطان معها. والتجزئة لم تُطلب باسمها ولا مرّة في ما قرأناه: تظهر مستترةً داخل مسألةٍ أكبر، فعليك أن تتعرّف عليها بنفسك. أمّا الكسور فلقيناها في دورةٍ واحدة من إحدى عشرة حديثة، بعد قسمةٍ إقليديّة. وعلاقة شال مبرهنةٌ مستقلّة برقمها في الكتاب، ولم نجدها مطلوبةً في تلك الدورات؛ احفظها لأنّها تُستعمل في القيمة المطلقة، لا لأنّها تُسأل.

لحساب $\int_0^1 \dfrac{x^3}{x^2 - x - 2}\,dx$ ، ما الخطوة الأولى؟

أ) قسمة إقليديّة للبسط على المقام

ب) تفكيك الكسر مباشرةً بثابتين، من دون قسمة

ج) كتابة الجواب مباشرةً بالنمط $\dfrac{u'}{u}$

أ. نعم. درجة البسط 3 وهي أكبر من درجة المقام، فهذه الحالة الثانية. القسمة تعطي $x^3 = (x+1)(x^2 - x - 2) + 3x + 2$ ، ثمّ يعود الباقي إلى الحالة الأولى.

المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 208 إلى 216 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.