الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

# التوابع الأصليّة

سهم الاشتقاق مقلوباً، وثابتٌ واحد يفصل بين كلّ الأجوبة الصحيحة

التكامل والتوابع الأصليّة . الوحدة 7 . الدرس 1

بسيطة

طوال سنتين كان السؤال: ما مشتقّ هذا التابع؟ من هنا يُقلب السهم. صار السؤال: أيُّ تابعٍ مشتقُّه هو الذي أمامي؟ الجواب لا يكون واحداً أبداً، بل عائلةً كاملة تختلف عناصرها بثابتٍ فقط، وهذا هو كلّ مضمون الدرس. لن نحسب هنا تابعاً أصليّاً إلّا مرّةً واحدة؛ الحساب يبدأ في الدرس التالي. ما نتعلّمه هنا أدقّ من الحساب: كيف نتحقّق من جوابٍ معطى، ولماذا تُشترط كلمة «مجال» في كلّ سطرٍ من هذا الدرس.

## التعريف، وسهمٌ يُقلب

في الاشتقاق تنطلق من $F$ وتصل إلى $F'$ . هنا يُعطى لك $F'$ ويُطلب $F$ . لا يوجد اسمٌ جديد لهذه العمليّة ولا رمزٌ جديد لها في هذا الدرس، بل اسمٌ للنتيجة فقط: كلّ تابعٍ مشتقُّه هو $f$ يُسمّى تابعاً أصليّاً للتابع $f$ . لاحظ التنكير: «تابعاً أصليّاً»، لا «التابع الأصليّ». السبب يظهر بعد قليل.

**تعريف 1**

ليكن $f$ تابعاً معرّفاً على مجال $I$ . نقول إنّ التابع $F$ تابعٌ أصليٌّ للتابع $f$ على المجال $I$ إذا وفقط إذا كان $F$ اشتقاقيّاً على $I$ ، وكان $F'(x) = f(x)$ في حالة $x$ من $I$ .

الكتاب، الصفحة 199

**تذكّر:** كيف نثبت أنّ تابعاً $F$ تابعٌ أصليّ لتابع $f$ على مجال $I$ ؟ يكفي أن نثبت أنّ $F$ اشتقاقيّ على $I$ وأنّ $F'(x) = f(x)$ أيّاً كانت $x$ من $I$ . شرطان، لا أكثر، ولا حاجة إلى أيّ حساب.

### مثال، ستّة تحقّقات

$F(x)=2x-3 \Longrightarrow F'(x)=2$ تابعٌ أصليّ للتابع $f:x\mapsto 2$ على $\mathbb{R}$ .

$F(x)=x^3+1 \Longrightarrow F'(x)=3x^2$ تابعٌ أصليّ للتابع $f:x\mapsto 3x^2$ على $\mathbb{R}$ . ولاحظ أنّ $x^3$ وحده يصلح أيضاً.

$F(x)=\frac{1}{x} \Longrightarrow F'(x)=-\frac{1}{x^2}$ تابعٌ أصليّ للتابع $f:x\mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ على $]0,+\infty[$ ، وكذلك على $]-\infty,0[$ . مجالان، لا مجالٌ واحد، وهما مذكوران في السطر نفسه. والسبب هو موضوع المقطع التالي.

$F(x)=\ln x \Longrightarrow F'(x)=\frac{1}{x}$ تابعٌ أصليّ للتابع $f:x\mapsto \dfrac{1}{x}$ على $]0,+\infty[$ .

$F(x)=\ln(-x) \Longrightarrow F'(x)=\frac{1}{x}$ تابعٌ أصليّ للتابع نفسه، لكن على $]-\infty,0[$ . المشتقّ الداخليّ $-1$ يقابله المقام $-x$ ، فتختصر الإشارتان: $\dfrac{-1}{-x}=\dfrac{1}{x}$ .

$F(x)=\frac{1}{2}e^{2x-1}+3$
$F'(x)=e^{2x-1}$
تابعٌ أصليّ للتابع $f:x\mapsto e^{2x-1}$ . الكتاب يكتب هنا المجال $]-\infty,0[$ ، وهو صحيحٌ لكنّه ضيّقٌ بلا داعٍ: التابع اشتقاقيّ على $\mathbb{R}$ كلّها.

الكتاب، الصفحة 199

اقرأ التعريف مرّةً أخرى، وانظر ما لا يطلبه. لا يطلب أن يكون $f$ مستمرّاً. لا يطلب أن يكون $f$ اشتقاقيّاً. لا يطلب من $f$ شيئاً على الإطلاق سوى أن يكون معرّفاً على $I$ . الشرطان كلاهما على $F$ ، لا على $f$ . وهذا ليس تفصيلاً: سنرى في آخر الدرس تابعاً غير مستمرّ وله مع ذلك تابعٌ أصليّ.

التابع $F:x\mapsto x\ln x-x$ معرّفٌ على $]0,+\infty[$ . لأيّ تابعٍ $f$ هو تابعٌ أصليّ هناك؟

أ) $f(x)=\ln x+1$
ب) $f(x)=\dfrac{1}{x}$
ج) $f(x)=\ln x$

**ج.** نعم. بقاعدة الجداء $(x\ln x)'=\ln x+1$ ، ومنه $F'(x)=\ln x+1-1=\ln x$ . وهذه هي الطريقة الوحيدة في هذا الدرس: اشتقّ وقارن.

---

## واحدٌ يكفي، والباقي ثابت

«إنّ معرفة تابعٍ أصليٍّ لتابع على مجال كافٍ لمعرفة جميع التوابع الأصليّة لهذا التابع على هذا المجال». هذه جملة الكتاب بحرفها، وقد نقلناها كما هي، وهي أثمن ما في الدرس: لا يوجد بحثٌ ثانٍ. متى وجدت واحداً، وجدت الجميع، ولا يفصل بينها إلّا عددٌ حقيقيّ واحد.

**مبرهنة 1**

الفرض المشترك للنقاط الثلاث: ليكن $f$ تابعاً معرّفاً على مجال $I$ ، وليكن $F$ تابعاً أصليّاً للتابع $f$ على المجال $I$ ، عندئذٍ:

① كلُّ تابعٍ $G(x) = F(x) + k \Longrightarrow G' = f$ ، حيث $G : x \mapsto F(x) + k$ ثابتٌ حقيقيّ، هو تابعٌ أصليٌّ للتابع $f$ .

② أيُّ تابعٍ أصليٍّ $G$ للتابع $f$ على المجال $I$ هو من الصيغة $G' = f \Longrightarrow G(x) = F(x) + k$ ، حيث $k$ ثابتٌ حقيقيّ. وهذا هو الاتّجاه الذي يُغلق الباب.

③ أيّاً كان $x_0$ من $I$ و $y_0$ من $\mathbb{R}$ ، يوجد تابعٌ أصليٌّ وحيدٌ $G$ للتابع $f$ على $I$ يحقّق $G(x_0) = y_0$ .

الكتاب، الصفحة 199

هذا هو البرهان الوحيد في الدرس كلّه، والكتاب يوجزه. نفصّله، لأنّ في وسطه خطوةً لا يسمّيها وعليها يقوم كلّ شيء. المطلوب: إثبات المبرهنة $1$ .

$$G' = f \iff G = F + k$$

**1. الاتّجاه السهل** إذا كان $G = F + k$ ، فاشتقاق المجموع يعطي مشتقّ $F$ زائد مشتقّ الثابت، ومشتقّ الثابت صفر. الكتاب يقول هنا «من الواضح» ولا يسمّي خطّيّة الاشتقاق.

$$G' = F' + 0 = f$$

**2. الاتّجاه الآخر يبدأ بالفرق** بالعكس، ليكن $G$ تابعاً أصليّاً كيفما كان للتابع $f$ على $I$ . ننظر إلى الفرق $G - F$ ، لا إلى $G$ وحده. مشتقّ الفرق ينعدم على $I$ كلّه.

$$\begin{aligned}(G - F)' &= G' - F' \\ &= f - f = 0\end{aligned}$$

**3. الخطوة التي لا يسمّيها الكتاب** من انعدام المشتقّ يستنتج الكتاب أنّ $G - F$ تابعٌ ثابت. هذه ليست بديهيّة، بل نتيجةٌ درسنَاها في وحدة الاشتقاق: تابعٌ مشتقُّه معدومٌ على مجالٍ هو تابعٌ ثابتٌ عليه. الكتاب يستعملها هنا من دون أن يسمّيها ومن دون أن يحيل إليها. نسمّي هذا الثابت $k$ .

$$\forall x \in I : (G - F)'(x) = 0 \Longrightarrow G - F = k$$

**4. الشرط الابتدائيّ يعيّن الثابت** الآن ③. بعد ② صارت كلّ التوابع الأصليّة من الصيغة $F + k$ ، فالمسألة تؤول إلى تعيين $k$ وحده. والشرط $G(x_0) = y_0$ معادلةٌ من الدرجة الأولى في $k$ ، فلها حلٌّ واحد، لا أكثر ولا أقلّ.

$$k = y_0 - F(x_0) \Longrightarrow G(x) = F(x) - F(x_0) + y_0$$

البرهان كلّه معلّقٌ بخطوةٍ واحدة: انعدام المشتقّ يعني الثبات. وهي صحيحةٌ على مجال، وعلى مجالٍ فقط. احفظ الشرط مع المبرهنة، لا بعدها.

$$G' = F' \iff G - F = k$$

**انتبه:** لماذا كُتبت كلمة «مجال» في كلّ سطرٍ من هذا الدرس؟ لأنّ المبرهنة تصير خطأً من دونها. عد إلى السطر الثالث من أمثلة الكتاب: التابع $f : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ معرّفٌ على $\mathbb{R}^*$ ، وهي ليست مجالاً بل اجتماع مجالين. خذ $F_1(x) = \dfrac{1}{x}$ ، وخذ $F_2$ الذي يساوي $\dfrac{1}{x}$ عند $x < 0$ ويساوي $\dfrac{1}{x} + 1$ عند $x > 0$ . كلاهما مشتقُّه $-\dfrac{1}{x^2}$ في كلّ نقطة، والفرق بينهما ليس ثابتاً: هو $0$ على اليسار و $1$ على اليمين. المبرهنة $1$ ② لا تُخالَف هنا، لأنّها لم تُدَّعَ أصلاً؛ شرطها غير محقَّق. ولهذا يذكر الكتاب المجالين منفصلين في سطره الثالث، من دون أن يقول لماذا.

على $\mathbb{R}^*$ وجدنا تابعين مشتقُّهما واحد وفرقُهما غير ثابت. ما الاستنتاج الصحيح؟

أ) لا تناقض: $\mathbb{R}^*$ ليس مجالاً، فشرط المبرهنة غير محقَّق

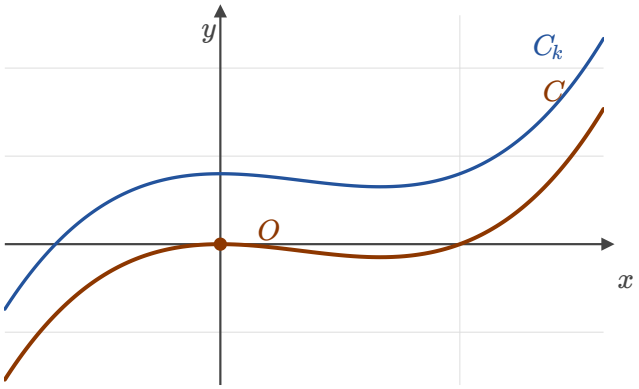
ب) المبرهنة $1$ ② خاطئة، وهذا مثالٌ مضادّ لها

ج) الفرق ثابتٌ فعلاً، لأنّه يأخذ قيمةً واحدة على كلّ واحدٍ من المجالين

**أ.** نعم. المبرهنة $1$ تشترط مجالاً، أي مجموعةً متّصلة. $\mathbb{R}^*$ مجالان منفصلان، والثابت يمكن أن يختلف بينهما. على كلّ واحدٍ منهما وحده تبقى المبرهنة صحيحة.

## المنحني التكامليّ، وشرطٌ واحد يختار

للمبرهنة $1$ ترجمةٌ بالرسم، وهي أوضح من الصيغة. في معلمٍ متجانس $(O, i, j)$ ، إذا كان $C$ الخطّ البيانيّ لتابعٍ أصليّ $F$ للتابع $f$ ، سمّيناه منحنياً تكامليّاً للتابع $f$ . وعندئذٍ ينتج المنحني التكامليّ الموافق للتابع الأصليّ $F_k : x \mapsto F(x) + k$ من $C$ بانسحابٍ شعاعه $k\,j$ . أي أنّ التوابع الأصليّة كلّها منحنٍ واحد، مرفوعٌ أو مخفوضٌ شاقوليّاً.




التابع $F : x \mapsto x^3 - x^2$ تابعٌ أصليّ للتابع $f : x \mapsto 3x^2 - 2x$ على $\mathbb{R}$ . المنحنى $C$ هو المنحني التكامليّ الذي يمرّ بالمبدأ $O(0,\,0)$ ، و $C_k$ منحنٍ تكامليٌّ آخر ينتج منه بانسحابٍ شاقوليّ. المنحنيان لا يتقاطعان أبداً، لأنّ الفرق بينهما هو $k$ عند كلّ فاصلة.

هذا المثال هو المكان الوحيد في الدرس كلّه الذي يُحسب فيه تابعٌ أصليّ بدل التحقّق منه. عيّن التابع الأصليّ الذي ينعدم عند $x = 1$ للتابع $f$ المعرّف على $\mathbb{R}$ .

$$f(x) = 3x^2 - x + 1$$

**1. تابعٌ أصليّ واحد، أيّ واحد** نبحث عن أيّ تابعٍ أصليّ، بلا شرط. حدّاً حدّاً، ورفعُ الأُسّ والقسمة عليه يكفيان هنا. التحقّق فوريّ بالاشتقاق.

$$F(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$$

**2. العائلة كلّها** بالمبرهنة $1$ ②، كلّ تابعٍ أصليّ آخر يختلف عن $F$ بثابت. فنكتب العائلة بمجهولٍ واحد.

$$G(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + k$$

**3. الشرط يعيّن الثابت** «ينعدم عند $x = 1$ » يعني $G(1) = 0$ . نعوّض ونحلّ في $k$ . المعادلة من الدرجة الأولى، فالحلّ واحد، كما تقول المبرهنة $1$ ③.

$$0 = G(1) = 1 - \frac{1}{2} + 1 + k = \frac{3}{2} + k$$

**4. الجواب، ثمّ التحقّق** إذن $k = -\dfrac{3}{2}$ . والتحقّق شرطان: الاشتقاق يعيد $f$ ، والتعويض بـ $1$ يعطي صفراً. كلاهما يُجرى في سطر.

$$G(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$$

الترتيب ثابتٌ في كلّ مسألةٍ من هذا النوع: أوجد واحداً، أضف $k$ ، ثمّ عوّض بالشرط. من يعوّض قبل أن يضيف $k$ يفقد المجهول الذي يحتاجه.

$$G(x) = F(x) - F(x_0) + y_0$$

**تذكّر:** شرطٌ ابتدائيّ واحد يعطي جواباً واحداً، لا اثنين ولا عائلة. هذا مضمون المبرهنة 1 ③، وهو ما يجعل $\ln$ و $\exp$ تابعين معيّنين لا عائلتين. ومن يترك $k$ في الجواب النهائيّ بعد إعطائه شرطاً ابتدائيّاً لم يُنهِ المسألة.

التابع الأصليّ للتابع $f : x \mapsto 2x$ على $\mathbb{R}$ الذي يأخذ القيمة 5 عند $x = 1$ هو:

أ) $G(x) = x^2 + 5$
ب) $G(x) = x^2 + 4$
ج) $G(x) = x^2$

**ب.** نعم. $F(x) = x^2$ تابعٌ أصليّ، فالعائلة $x^2 + k$ ، والشرط $1 + k = 5$ يعطي $k = 4$ . والتحقّق: $G(1) = 5$ ومشتقّه $2x$ .

## هل يوجد أصلاً؟ المبرهنة الأساسيّة

انتبه إلى ما لم تقله المبرهنة 1 . فرضها المشترك، قبل النقاط الثلاث كلّها، هو أنّ $F$ تابعٌ أصليّ للتابع $f$ موجودٌ سلفاً. أي أنّها تفترض الوجود ولا تثبته. هي تصف العائلة بعد العثور على عنصرٍ منها. يبقى السؤال الأوّل بلا جواب: متى نضمن أنّ العائلة ليست خالية؟ الجواب في المبرهنة الآتية، ويسمّيها الكتاب المبرهنة الأساسيّة في نظرية التوابع الأصليّة.

**مبرهنة 2**

ليكن $f$ تابعاً مستمرّاً على مجال $I$ . عندئذٍ يوجد تابعٌ أصليٌّ $F$ للتابع $f$ على $I$ . $\exists F : \forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$

والكتاب يقول صراحةً إنّ إثباتها خارجٌ عن إطار هذا الكتاب. فهي تُعطى لك لتستعملها، لا لتبرهنها.

الكتاب، الصفحة 201

**انتبه:** السهم في اتّجاهٍ واحد. «مستمرّ» يكفي لوجود تابعٍ أصليّ، لكنّه ليس لازماً له، والكتاب لا ينفي العكس ولا يؤكّده. المثال المضادّ خارج عن مقرّرك، لكنّه يحسم الاتّجاه: خذ $F(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ عند $x \neq 0$ ، مع $F(0) = 0$ . هذا التابع اشتقاقيّ عند كلّ نقطة، بما فيها الصفر حيث $F'(0) = 0$ . ومشتقّه عند $x \neq 0$ هو $2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ، وهذا يتأرجح بين $-1$ و $1$ مهما اقتربنا من الصفر، ويمكنك التحقّق بنفسك: عند $x = \frac{1}{2n\pi}$ قيمته $-1$ بالضبط، وعند $x = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ قيمته $1$ بالضبط، مهما كبر العدد الطبيعيّ $n$ . فلا نهاية له عند الصفر، أي أنّه غير مستمرّ هناك. ومع ذلك له تابعٌ أصليّ، وهو $F$ نفسه. الخلاصة: الاستمرار يضمن الوجود، والوجود لا يضمن الاستمرار.

المبرهنتان معاً تفسّران تعريفاً قديماً عندك. تذكّر أنّنا عرّفنا $\ln$ بأنّه التابع الأصليّ الوحيد للتابع $x \mapsto \frac{1}{x}$ على $]0, +\infty[$ الذي ينعدم عند $x = 1$ . الآن ترى من أين جاءت كلّ كلمةٍ في ذلك التعريف: التابع $x \mapsto \frac{1}{x}$ مستمرٌّ على $]0, +\infty[$ ، فالمبرهنة $2$ تضمن الوجود؛ والشرط $\ln 1 = 0$ هو شرطٌ ابتدائيّ، فالمبرهنة $1$ ③ تضمن الوحدانيّة. الكتاب يضع هذا المثال هنا ولا يشرح الرابط. الرابط هو هذا.

وهذا أدقّ مثالٍ في الدرس، لأنّه يفرّق بين مجالٍ مفتوح ومجالٍ مغلقٍ من طرف. ① أثبت أنّ $F : x \mapsto \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ المعرّف على $[0, +\infty[$ تابعٌ أصليّ للتابع $f : x \mapsto \sqrt{x}$ على المجال المفتوح $]0, +\infty[$ . ② أيكون $F$ تابعاً أصليّاً للتابع $f$ على $[0, +\infty[$ ؟

$$F(x) = \frac{2}{3}\,x\sqrt{x}$$

**1. ① على المجال المفتوح** التابعان $x \mapsto x$ و $x \mapsto \sqrt{x}$ اشتقاقيّان على $]0, +\infty[$ ، فجداؤهما كذلك. نشتقّ بقاعدة الجداء.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{2}{3}x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{3}\sqrt{x} = \sqrt{x} \end{aligned}$$

**2. ② لماذا لا يكفي ما سبق** عند إضافة الصفر إلى المجال تسقط الحجّة كلّها، لأنّ $x \mapsto \sqrt{x}$ ليس اشتقاقيّاً عند الصفر، فقاعدة الجداء لا تُطبَّق هناك. لا بدّ من العودة إلى تعريف العدد المشتقّ نفسه.

$$t(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \frac{2}{3}\sqrt{x}$$

**3. النهاية عند الصفر** التابع $t$ معرّفٌ عند $x > 0$ وحدها، فالنهاية المقصودة نهايةٌ من اليمين. الكتاب يكتبها من دون الإشارة $+$ ، ونكتبها هنا كاملة، لأنّ الكتابة المجرّدة تدّعي نهايةً من الجهتين، و $t$ غير معرّفٍ من اليسار أصلاً.

$$\lim_{x \to 0^+} t(x) = 0 \Longrightarrow F'(0) = 0$$

**4. المطابقة عند الطرف** بقي أن نقارن بالقيمة المطلوبة عند الطرف: $f(0) = \sqrt{0} = 0$ . العددان متساويان، فالشرطان محقّقان على المجال الأوسع، والجواب نعم.

$$F'(0) = 0 = f(0)$$

---

عند طرف مجالٍ مغلق لا تُستعمل قواعد الاشتقاق، بل يُعاد إلى تعريف العدد المشتقّ، والنهاية تُؤخذ من جهةٍ واحدة. هذه الحركة تظهر كلّما ظهر جذرٌ عند الصفر.

$$F'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{F(x) - F(a)}{x - a}$$

**تذكّر:** وكلمةٌ صريحة عمّا لا يفعله هذا الدرس. هو لا يحسب: مثالٌ واحدٌ يتيم عيّن فيه الكتاب تابعاً أصليّاً. وتمارينه الثلاثة فحصٌ لا حساب: اثنتان تقولان «تحقّق»، والثالثة سؤالُ نعم أو لا، وجوابه لا. أدواتُ الحساب تأتي في الدرس التالي، جدولين وثلاث حيل. أمّا ما يبقى معك من هنا فثلاثة أشياء: الثابت $k$ جزءٌ من الجواب، كلمة «مجال» ليست زينة، والتحقّق دائماً بالاشتقاق.

أيّ العبارات الآتية صحيحة؟

أ) إذا كان $f$ مستمرّاً على المجال $I$ ، وُجد له تابعٌ أصليّ على $I$

ب) إذا وُجد للتابع $f$ تابعٌ أصليّ على $I$ ، كان $f$ مستمرّاً على $I$

ج) المبرهنة $2$ تعطي صيغة التابع الأصليّ لكلّ تابعٍ مستمرّ

**أ.** نعم، وهذه هي المبرهنة $2$ بحرفها. لاحظ أنّها تعد بالوجود فقط، ولا تعطي صيغة.

---

المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 199 إلى 202 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.