الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

نهاية تابع مركّب

بسيطة

حين يجلس تابع داخل تابع: ننقل النهاية من الداخل إلى الخارج بتغيير المتحوّل

التوابع: النهايات والاستمرار . الوحدة 2 . الدرس 5

قواعد العمليّات على النهايات تكفي للجمع والجداء والقسمة. لكنّ كثيراً من توابع الامتحان ليست جمعاً ولا جداءً، بل تابعاً وُضع داخل تابع آخر، مثل $\sqrt{x^2-x+1}$ أو $\cos\frac{1}{x}$. لهذه التوابع أداة واحدة، وهي بسيطة إلى حدّ يفاجئ: نتتبّع المقدار الداخلي أوّلاً، نرى إلى أين وصل، ثمّ نسأل التابع الخارجي عمّا يفعله هناك. الترتيب هو كلّ شيء، والكتاب يكتبه بلون مميّز. ومن هذه الأداة تخرج حيلة تغيير المتحوّل، وهي التي تنقذ الحالات التي تعجز فيها القواعد المعتادة.

تابعٌ داخل تابع

انظر إلى $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$. ليس هنا جمعٌ بين تابعين معروفين، ولا جداءٌ ولا كسر. لو حاولت تطبيق قواعد العمليّات على النهايات لما وجدت ما تطبّقها عليه، فالتابع ليس مؤلّفاً من قطعتين متجاورتين، بل من قطعتين إحداهما داخل الأخرى.

فكّك ما تراه بالطريقة التي تحسب بها فعلاً على الآلة الحاسبة. المرحلة الأولى: تحسب x^2-x+1. المرحلة الثانية: تأخذ الجذر التربيعي للناتج. سمِّ ناتج المرحلة الأولى X، فيصير $X=h(x)=x^2-x+1$ والمرحلة الثانية $g(X)=\sqrt{X}$. نسمّي h التابع الداخلي و g التابع الخارجي.

$$X=h(x),\qquad f(x)=g(X)=g\big(h(x)\big)=(g\circ h)(x)$$

هذا التفكيك ليس زينةً في الدفتر. هو الطريق المنظّم لحساب نهاية f: لا نستطيع أن نسأل عن الكلّ دفعة واحدة، لكنّنا نستطيع أن نسأل عن كلّ مرحلة على حدة.

تذكّر: كلّ تابع مركّب يُقرأ من الداخل إلى الخارج: x يدخل في h، وناتج h يدخل في g. عكسُ هذا الترتيب يعطي تابعاً آخر تماماً، فـ $g\circ h$ و $h\circ g$ ليسا الشيء نفسه.

نريد تفكيك التابع $f(x)=\sqrt{3x-1}$ إلى $g\circ h$. ما التابع الداخلي h ؟

أ) $h(x)=\sqrt{x}$

ب) $h(x)=3x-1$

ج) $h(x)=3x$

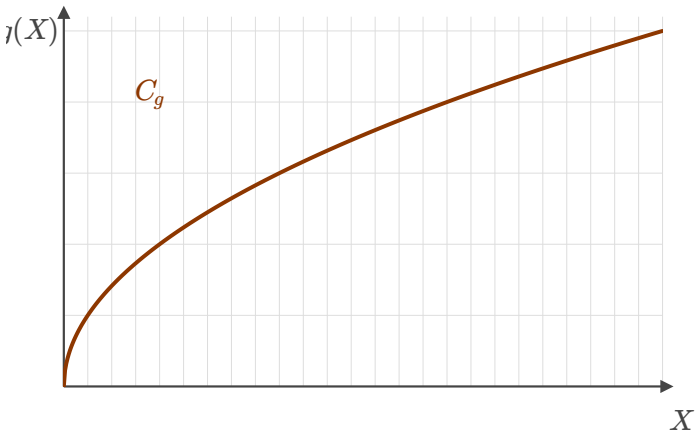
ب. صحيح. نضع $X=3x-1$ ، فيصير $f(x)=\sqrt{X}$ ، وهذا هو التفكيك المطلوب.

كيف تعبر النهاية من الداخل إلى الخارج

الآن السؤال الحقيقي: إذا عرفنا إلى أين يسعى المقدار الداخلي، وعرفنا ماذا يفعل التابع الخارجي هناك، فهل نعرف نهاية المركّب؟ الجواب نعم، والكتاب يقبل هذه المبرهنة من دون إثبات ويبني عليها الدرس كلّه.

طبّقها على مثالنا عند $+\infty$. المقدار الداخلي $h(x)=x^2-x+1$ يكبر بلا حدّ، أي $\lim_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$. إذن المتحوّل الجديد X نفسه يسعى إلى $+\infty$. وهنا وحده نسأل التابع الخارجي: ما نهاية $\sqrt{X}$ حين يسعى X إلى $+\infty$ ؟ من النهايات المرجعيّة نعرف أنّها $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-x+1\right)=+\infty,\qquad \lim_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty \implies \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+1}=+\infty$$



التابع الخارجي $g(X)=\sqrt{X}$ وحده. قيمه تكبر بلا حدّ كلّما كبر X ، وهذا كلّ ما نحتاجه بعد أن عرفنا أنّ المقدار الداخلي يسعى إلى $+\infty$.

مبرهنة 4

$f = g \circ h, \quad f(x) = g\big(h(x)\big)$ ثلاثة توابع f و g و h ، والمركّب المدروس هو f .

$\lim_{x \to a} h(x) = b$ بدايةً: إلى أين يسعى المقدار الداخلي حين تسعى x إلى a ؟ الجواب هو b .

$\lim_{t \to b} g(t) = c$ ثمّ: ماذا يفعل التابع الخارجي عند b بالذات، لا عند a ؟

$\lim_{x \to a} f(x) = c$ النتيجة، وهي صحيحة سواءٌ أكانت a و b و c أعداداً حقيقية منتهية أم مقادير لانهائيّة.

الكتاب، الصفحة 37

انتبه: الترتيب هو كلّ شيء، والكتاب يكتبه بلون مميّز: بدايةً $b = \lim_{x \to a} h(x)$ ، ثمّ نهاية g عند b . من يبحث عن نهاية g عند a يكون قد سأل التابع الخارجي عن مكان لا يمرّ به أصلاً. في $\cos \frac{1}{x}$ عند $+\infty$ مثلاً، لا معنى لسؤال جيب التمام عمّا يفعله عند $+\infty$ ، لأنّ الزاوية التي تصله هي $\frac{1}{x}$ وهي تسعى إلى الصفر.

تذكّر: العدد الوسيط b هو حلقة الوصل. اكتبه صراحةً على ورقتك في سطر مستقلّ. من لا يكتبه لا يحسب، بل يخمّن.

المبرهنة لا تخصّ اللّانهاية وحدها

المثال الثاني في الكتاب يعمل عند عدد حقيقي، لا عند اللّانهاية، والطريقة نفسها. التابع $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x - 1}}$ معرّف على المجال $\left] \frac{1}{3}, +\infty \right[$ ، والمطلوب نهايته حين تسعى x إلى $\frac{1}{3}$.

نضع $X = h(x) = 3x - 1$ ، فيكون التابع الخارجي $g(X) = \dfrac{1}{\sqrt{X}}$. أوّلاً المقدار الداخلي: حين تسعى x إلى $\frac{1}{3}$ يسعى $3x - 1$ إلى 0 ، فـ $b = 0$. ثمّ التابع الخارجي عند 0 : ونعلم أنّ $\lim_{X \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{X}} = +\infty$. إذن نهاية f هي $+\infty$.

$$\lim_{x \to \frac{1}{3}} (3x - 1) = 0, \qquad \lim_{X \to 0} \frac{1}{\sqrt{X}} = +\infty \implies \lim_{x \to \frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt{3x - 1}} = +\infty$$

انتبه: انتبه إلى دور مجموعة التعريف في هذا المثال. على المجال $\left] \frac{1}{3}, +\infty \right[$ يكون $X = 3x - 1$ موجباً دائماً، فالسعي إلى الصفر يحدث من اليمين وحده، وهذا ما يجعل $\dfrac{1}{\sqrt{X}}$ ذا معنى. من أهمل المجال وجد نفسه يسأل عن جذر عدد سالب.

التابع $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ معرّف على $]-1,1[$. ما نهايته عند 1 ؟

أ) 0

ب) 1

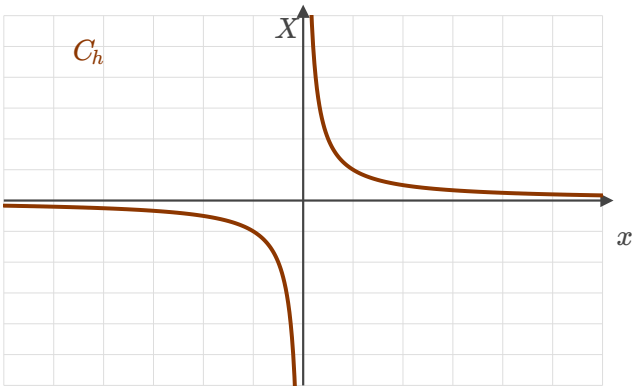
ج) $+\infty$

ج. صحيح. على $]-1,1[$ يكون $X=1-x^2$ موجباً ويسعى إلى 0 ، و $\lim_{X\to 0}\frac{1}{\sqrt{X}}=+\infty$.

تغيير المتحوّل

حين نكتب $X=h(x)$ ثمّ $f(x)=g(X)$ نقول إنّنا غيّرنا المتحوّل. الاسم يوحي بحيلة خارجة عن الدرس، وهو في الحقيقة ليس إلّا تركيب تابعين وقراءة المبرهنة السابقة بالاتّجاه المفيد: بدل أن ندرس f عند a ، ندرس g عند b ، حيث تكون النهاية معروفة.

وأنفع تغيير في الوحدة كلّها هو $X=\frac{1}{x}$ ، لأنّه يبدّل الصفر باللّانهاية. حين تكبر x بلا حدّ يصغر مقلوبها ويسعى إلى 0 بقيم موجبة، وحين تمضي x نحو $-\infty$ يسعى مقلوبها إلى 0 بقيم سالبة. والطريق سالك في الاتّجاهين.



التابع المساعد $h(x)=\frac{1}{x}$. كلّما ابتعدنا يميناً اقترب X من 0 بقيم موجبة، وكلّما ابتعدنا يساراً اقترب منه بقيم سالبة. وقرب المبدأ يحدث العكس تماماً.

تغيير المتحوّل وفق مقلوب المتحوّل

$X = \frac{1}{x}$ المتحوّل الجديد، أي التابع الداخلي $h(x) = \frac{1}{x}$.

$x \to +\infty \implies X \to 0^+$ دراسة النهاية عند $+\infty$ تصير دراسةً عند الصفر من اليمين.

$x \to -\infty \implies X \to 0^-$ ودراسة النهاية عند $-\infty$ تصير دراسةً عند الصفر من اليسار.

$x \to 0^+ \implies X \to +\infty$ والاتّجاه معكوس أيضاً: من الصفر من اليمين إلى $+\infty$.

$x \to 0^- \implies X \to -\infty$ ومن الصفر من اليسار إلى $-\infty$. أربع طرق، ونختار منها الطريق الذي تصير عنده النهاية معروفة.

الكتاب، الصفحة 38

انتبه: إذا وصلتَ إلى الشكل $0 \times (+\infty)$ فلا تفكّ الجداء إلى نهايتين. قواعد العمليّات لا تقول شيئاً عنه، فهذه إحدى صِيَغ عدم التعيين الأربع. الطريقان المفتوحان هما تغيير المتحوّل ومبرهنات المقارنة، لا القسمة إلى قطعتين.

مثال محلول: الجداء الذي يعاند

نجمع الآن كلّ ما سبق في مثال الكتاب نفسه. اقرأ الخطوة، احسبها على ورقتك، ثمّ اكشف الجواب. وابدأ بمحاولة القواعد المعتادة، فالمقصود أن ترى بعينك أين تتوقّف.

التابع f معرّف على الأعداد الحقيقية غير المعدومة بالعلاقة أدناه. المطلوب نهايته عند $+\infty$.

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

1. نجرّب القواعد المعتادة العامل الأوّل x يكبر بلا حدّ. والعامل الثاني $\sin \frac{1}{x}$ نهايته 0 : المقدار الداخلي $\frac{1}{x}$ يسعى إلى الصفر، وجيب الصفر هو 0 .

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \sin \frac{1}{x} = 0$$

2. نتوقّف عند صيغة عدم التعيين الجداء إذن من الشكل $0 \times (+\infty)$ ، وهذه إحدى صِيَغ عدم التعيين الأربع. لا تعطي القواعد هنا جواباً، ولا يجوز أن نكتب 0 بحجّة أنّ أحد العاملين يسعى إلى الصفر.

$$(+\infty) \times 0$$

3. نغيّر المتحوّل نضع $X = \frac{1}{x}$ ، فيكون $x = \frac{1}{X}$. وحين تسعى x إلى $+\infty$ يسعى X إلى 0 . هذا هو العدد الوسيط b .

$$X = \frac{1}{x}, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

4. نعيد كتابة التابع بالمتحوّل الجديد نعوّض x بـ $\frac{1}{X}$ و $\frac{1}{x}$ بـ X ، فيصير الجداء العنيد كسراً نعرفه. هذا هو التابع الخارجي g .

$$f(x) = \frac{1}{X} \sin X = \frac{\sin X}{X} = g(X)$$

5. نقرأ النهاية في المكان الجديد نهاية $\frac{\sin X}{X}$ حين يسعى X إلى الصفر معروفة من درس العمليّات على النهايات، وهي 1 .

$$\lim_{X \to 0} \frac{\sin X}{X} = 1$$

6. نُرجع النتيجة إلى المتحوّل الأصلي بحسب المبرهنة، نهاية المركّب عند $+\infty$ هي نهاية التابع الخارجي عند $b = 0$. فالجواب 1 ، لا 0 .

$$\lim_{x \to +\infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$$

حين يعاند الجداء عند الشكل $0 \times \infty$ ، اسأل نفسك: أيّ متحوّل جديد ينقل المسألة إلى مكان أعرفه؟ مع التوابع المثلّثية يكون الجواب غالباً $X = \frac{1}{x}$.

$$\lim_{x \to +\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{X \to 0} \frac{\sin X}{X} = 1$$

قارن النتيجتين جنباً إلى جنب: $\lim_{x \to +\infty} \sin \frac{1}{x} = 0$ بينما $\lim_{x \to +\infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$. العامل x يكبر بالسرعة نفسها التي يصغر بها الجيب، فيتوازنان عند 1 . هذا التوازن هو بالضبط ما يضيع حين يُفكّ الجداء إلى نهايتين.

لماذا العدد المشتقّ نهاية

يختم الكتاب الدرس بتطبيق يبدو بعيداً عنه، وهو في صميمه، ويُسأل في البكالوريا كثيراً: العدد المشتقّ $f'(a)$ نفسه نهاية تابع مركّب.

تذكّر التعريف الذي تعرفه من قبل: التابع f اشتقاقي عند a إذا كان للتابع $t(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ نهاية حقيقية عند الصفر، وعندئذ نسمّي هذه النهاية $f'(a)$. لاحظ أنّ المتحوّل هنا هو h ، وأنّ المكان المدروس هو الصفر.

والآن انظر إلى التابع الذي يظهر في الامتحان: $g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. ضع $h(x)=x-a$ ولاحظ أنّ $t\big(x-a\big)=g(x)$ ، فيكون $g=t\circ h$ بالضبط. المقدار الداخلي $x-a$ يسعى إلى الصفر حين تسعى x إلى a ، ونهاية t عند الصفر هي $f'(a)$.

$$\lim_{x\to a}(x-a)=0,\quad \lim_{h\to 0}t(h)=f'(a)\implies \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

تذكّر: هذه النتيجة تُطلب في البكالوريا بصيغتها المقلوبة: تُعطى نسبة من الشكل $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ويُطلب حساب نهايتها عند a . الجواب ليس حساباً بل تعرّفاً: هو العدد المشتقّ $f'(a)$.

ما نهاية هذا التابع عند $+\infty$ ؟

$$f(x)=\cos\frac{1}{x}$$

أ) 1

ب) 0

ج) لا وجود لها، لأنّ جيب التمام متأرجح

أ. صحيح. المقدار الداخلي $\frac{1}{x}$ يسعى إلى 0 ، فـ $b=0$ ، و $\lim_{X\to 0}\cos X=1$.

المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 37 إلى 39 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.