الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

الاستمرار

بسيطة

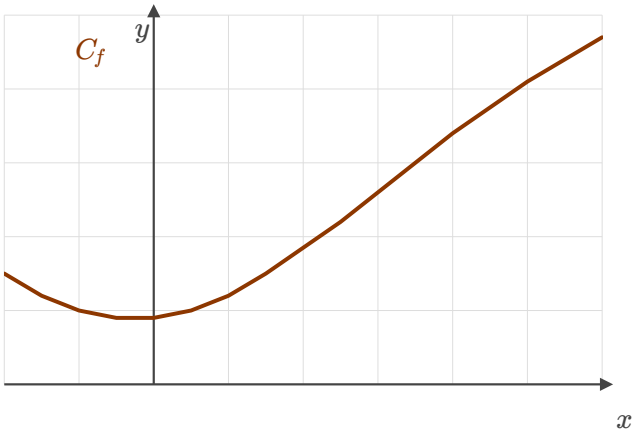
حين تكون نهاية التابع عند نقطة هي قيمته عندها بالضبط

التوابع: النهايات والاستمرار . الوحدة 2 . الدرس 7

كلّ ما مضى من هذه الوحدة كان عن النهاية وحدها: إلى أين تتّجه قيم التابع. وفي هذا الدرس نضع النهاية وجهاً لوجه أمام قيمة التابع نفسها عند النقطة، ونسأل سؤالاً واحداً: هل تساويها؟ إن كان الجواب نعم قلنا إنّ التابع مستمرّ عند تلك النقطة. الفكرة تبدو صغيرة، لكنّها الشرط الذي تقوم عليه مبرهنة القيمة الوسطى وحلّ المعادلات في الدرس التالي، وهي التي تفصل بين الرسم الذي يقترح والحساب الذي يبرهن.

الرسم يقترح، والحساب يحكم

أسهل طريق إلى فكرة الاستمرار هو النظر إلى الخطّ البياني. يقول الكتاب إنّ التابع مستمرّ على مجال حين يكون خطّه البياني مكوّناً من «قطعة واحدة»، أو حين نستطيع رسمه «دون رفع القلم» عن الورقة. ولاحظ أنّ الكتاب نفسه وضع هاتين العبارتين بين علامتي اقتباس: فهما وصف لما نراه، لا تعريف نحسب به.



التابع f على المجال $[-2,6]$: الخطّ البياني قطعة واحدة، فلا انقطاع في أيّ نقطة منه.

خذ الآن تابعاً آخر g معرّفاً على المجال نفسه $[-2,6]$ ، لكنّه يقفز عند 3 : كلّما اقتربنا من 3 من جهة اليسار اقتربت قيمه من 1 ، وكلّما اقتربنا من جهة اليمين اقتربت قيمه من 2 . القراءتان لا تلتقيان.

$$\lim_{x\to 3,\ x<3} g(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 3,\ x>3} g(x) = 2$$

العددان مختلفان، فليس للتابع g نهاية عند 3 ، وخطّه البياني ينفصل هناك إلى قطعتين. ولاحظ كيف انتهى الأمر: بدأنا من الصورة وختمنا بحساب نهايتين. الصورة دلّتنا على موضع الشكّ، والنهاية هي التي حكمت.

انتبه: لا يُقبل «الخطّ البياني قطعة واحدة» جواباً في ورقة الامتحان. الرسم يدلّ ولا يبرهن، ودقّة القلم لا تكفي للتمييز بين قفزة صغيرة واتّصال. البرهان في كلّ حال هو الحساب: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

التعريف: النهاية عند a هي $f(a)$

ما الذي ينقص التابع g عند 3 ؟ قيمته هناك موجودة، والقيم من الجهتين تقترب من عددين، لكنّ العددين مختلفان فلا نهاية أصلاً. وحتى لو تساوت النهايتان من الجهتين على عدد واحد، يبقى سؤال أخير: هل ذلك العدد هو قيمة التابع نفسها عند النقطة؟

من هنا يأتي التعريف. الاستمرار عند نقطة a يجمع ثلاثة شروط في سطر واحد: أن تكون a من مجموعة التعريف فتوجد القيمة $f(a)$ ، وأن توجد النهاية $\lim_{x\to a} f(x)$ ، وأن يتساوى الاثنان.

تعريف 6

لتكن a نقطة من D_f . نقول إنّ التابع f مستمرّ عند a ، إذا وفقط إذا تحقّق هذا الشرط. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

ونقول إنّ f مستمرّ على مجموعة D محتواة في D_f ، إذا وفقط إذا كان مستمرّاً عند كلّ نقطة من نقاط D . $(D \subset D_f)$ $\forall a \in D,\ \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

الكتاب، الصفحة 42

ونضيف شرطاً على مجموعة التعريف نفسها: D_f مؤلّفة من مجال أو من اجتماع مجالات غير مقتصرة على نقطة واحدة. والسبب واضح: لكي نتكلّم على اقتراب x من a يجب أن يكون حولها ما نقترب منه.

انتبه: ليس لدراسة استمرار تابع، عند نقطة لا تنتمي إلى مجموعة تعريفه، أيُّ معنى. التابع $x \mapsto \frac{1}{x}$ ليس «غير مستمرّ عند الصفر»، بل الصفر ليس من مجموعة تعريفه أصلاً، وهو مستمرّ على كامل مجموعة تعريفه $\mathbb{R}^*$.

تابعٌ f معرّف على الأعداد الحقيقية، ونعلم أنّ $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ وأنّ $f(2) = 3$. هل f مستمرّ عند 2 ؟

> **كيف أبدأ؟** تعريف الاستمرار عند نقطةٍ يجمع ثلاثة أمور: أن يكون التابع معرّفاً هناك، وأن توجد النهاية، وأن تتساوى الاثنتان. اذكر الثلاثة ثمّ افحصها واحداً واحداً على المعطيات.

أ) نعم، لأنّ للتابع نهاية عند 2

ب) نعم، لأنّ التابع معرّف عند 2

ج) لا، لأنّ النهاية لا تساوي $f(2)$

ج. صحيح. القيم تتجمّع حول 5 بينما التابع يأخذ عند 2 القيمة 3 ، فالشرط $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ غير محقّق.

الاستمرار يمرّ عبر العمليّات

لا حاجة إلى برهان جديد هنا. الاستمرار مكتوب بالنهايات، ونحن نعرف من الدروس السابقة كيف تتصرّف النهايات مع الجمع والضرب والقسمة والتركيب. فما يصحّ هناك ينتقل إلى هنا كما هو.

نتائج مباشرة من العمليّات على النهايات

$u \times v$ $\quad u+v$ مجموع تابعين مستمرّين عند نقطة (أو على مجموعة) مستمرّ عندها، وكذلك جداء ضربهما.

$v(a) \neq 0$, $\frac{u}{v}$ خارج القسمة مستمرّ أيضاً، شريطة كونه معرّفاً عند النقطة المدروسة.

$x \mapsto h\big(u(x)\big)$ مركّب تابعين مستمرّين مستمرّ، وهذا يأتي من خاصّة نهاية التابع المركّب.

الكتاب، الصفحة 42

انتبه: الشرط في القسمة ليس زينة. إذا انعدم المقام عند النقطة فالكسر غير معرّف هناك، والسؤال عن استمراره عند تلك النقطة بلا معنى. الجواب الصحيح في هذه الحال هو تحديد مجموعة التعريف أوّلاً، ثمّ القول إنّ التابع مستمرّ عليها كلّها.

التابعان u و v مستمرّان على الأعداد الحقيقية، و $v(1) = 0$. ماذا نقول عن $\frac{u}{v}$ عند 1 ؟

> **كيف أبدأ؟** قبل أن تسأل عن الاستمرار عند نقطةٍ، اسأل عمّا هو أسبق: هل تنتمي هذه النقطة إلى مجموعة تعريف التابع المدروس؟ احسب المقام عند 1 وقرّر.

أ) السؤال بلا معنى، لأنّ الكسر غير معرّف عند 1

ب) مستمرّ عند 1 ، لأنّ البسط والمقام مستمرّان

ج) غير مستمرّ عند 1 ، وقيمته هناك $+\infty$

أ. صحيح. العدد 1 ليس من مجموعة تعريف الكسر، فلا نسأل عن استمراره عنده. نقول بدل ذلك إنّ الكسر مستمرّ على مجموعة تعريفه.

التوابع التي نعرف استمرارها

الطريق الأقصر إلى الاستمرار في الامتحان ليس التعريف، بل قائمة قصيرة من التوابع المرجعيّة نعرف استمرارها سلفاً. وحجّة الكتاب في كلّها واحدة: هذه التوابع اشتقاقيّة، والاشتقاق يعطي الاستمرار كما سنرى في الفقرة التالية.

استمرار التوابع المرجعيّة

$x \mapsto \sqrt{x}$ اشتقاقي على المجال المفتوح $]0,+\infty[$ فمستمرّ عليه، و $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0=f(0)$ ، $[0,+\infty[$ فهو مستمرّ على المجال كلّه بما فيه الصفر.

$P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ توابع كثيرات الحدود مستمرّة على $\mathbb{R}$.

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ التوابع الكسريّة مستمرّة على مجموعة تعريفها D .

$x\mapsto\cos x$ ، $x\mapsto\sin x$ التابعان مستمرّان على $\mathbb{R}$.

الكتاب، الصفحة 43

تأمّل السطر الأوّل جيّداً، ففيه درس صغير. الاشتقاق أعطانا الاستمرار على المجال المفتوح وحده، لأنّ الجذر ليس اشتقاقيّاً عند الصفر. أمّا الصفر نفسه فأُلحق بالمجال بالتعريف مباشرة، بحساب النهاية ومقارنتها بالقيمة. أي أنّ الطريقين يعملان معاً: القاعدة العامّة حيث تكفي، والتعريف عند النقطة العنيدة.

وبهذه القائمة يصير الحكم على تابع مركّب مسألة قراءة. مثلاً $f:x\mapsto\sqrt{x^2+4x+5}$ معرّف على $\mathbb{R}$ لأنّ ما تحت الجذر موجب تماماً دائماً، إذ نكتبه بالشكل القانوني:

$$x^2+4x+5=(x+2)^2+1\geq 1>0$$

ثمّ نسمّي $g:x\mapsto x^2+4x+5$ و $h:x\mapsto\sqrt{x}$ ، فيكون $f(x)=h\big(g(x)\big)$ على $\mathbb{R}$. والتابع g كثير حدود مستمرّ على $\mathbb{R}$ ، والتابع h مستمرّ على مجموعة تعريفه، فالمركّب f مستمرّ على $\mathbb{R}$. وبالمثل $x\mapsto\sin x+\cos x$ مستمرّ على $\mathbb{R}$ لأنّه مجموع تابعين مستمرّين عليها.

تذكّر: كلّ تابع نبنيه من كثيرات الحدود والكسور والجذر والجيب وجيب التمام، بجمع أو ضرب أو قسمة أو تركيب، هو مستمرّ على مجموعة تعريفه. فالعمل الحقيقي في السؤال ليس إثبات الاستمرار، بل تحديد مجموعة التعريف بدقّة.

بين الاشتقاق والاستمرار

بقي أن نثبت الجملة التي اتّكأنا عليها في القائمة أعلاه: الاشتقاق يعطي الاستمرار. والبرهان قصير، ويستحقّ أن يُقرأ لأنّه يُظهر من أين تأتي المساواة $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

مبرهنة 5

إذا كان التابع f اشتقاقيّاً في نقطة a ، كان مستمرّاً في a . $f'(a) \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

وإذا كان f اشتقاقيّاً على مجال I ، كان مستمرّاً على I . $\forall a \in I,\ f'(a) \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \forall a \in I,\ \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

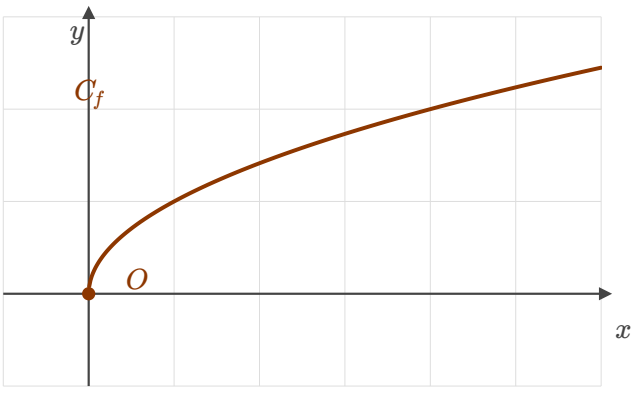
الكتاب، الصفحة 42

أمّا البرهان فهذا: نفترض f اشتقاقيّاً عند a ، ونضع $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ من أجل $x \neq a$. كون f اشتقاقيّاً يعني بالضبط أنّ لـ g نهاية منتهية عند a هي $f'(a)$. ومن تعريف g نكتب $f(x) - f(a) = (x-a)\,g(x)$ ، وبضرب النهايتين نجد $\lim_{x\to a}\big(f(x) - f(a)\big) = 0 \times f'(a) = 0$ ، أي $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

والسؤال الذي يطرح نفسه فوراً: وهل يصحّ العكس؟ لا. وأشهر شاهد على ذلك هو تابع الجذر التربيعي عند الصفر. رأينا أنّه مستمرّ هناك، ومع ذلك نحسب معدّل تغيّره فنجد:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$$

النهاية غير منتهية، فالتابع غير اشتقاقي عند الصفر. وترجمة ذلك على الرسم أنّ الخطّ البياني يقبل في المبدأ مماساً «شاقوليّاً»: الميل يكبر بلا حدّ، والمماس ينتصب موازياً لمحور التراتيب من دون أن ينقطع الخطّ.



$x \mapsto \sqrt{x}$: التابع مستمرّ عند الصفر، لكنّ خطّه ينطلق منه منتصباً، فالمماس شاقولي ولا اشتقاق هناك.

انتبه: استمرار تابع عند a لا يعني بالضرورة قابليّة اشتقاقه في a . التابعان $x \mapsto \sqrt{x}$ و $x \mapsto |x|$ مستمرّان عند الصفر وغير اشتقاقيّين عنده. السهم يسير في اتّجاه واحد: من الاشتقاق إلى الاستمرار، لا العكس.

تابعٌ f مستمرّ على مجال I . ماذا نستنتج عن اشتقاقه على I ؟

كيف أبدأ؟ المبرهنة في الكتاب تسير في اتّجاهٍ واحد. حدّد أوّلاً أيّ الخاصّتين تُستنتج من الأخرى، ثمّ ابحث عن تابعٍ واحدٍ يكفي لنقض الاتّجاه المعاكس.

أ) أنّه اشتقاقي على I

ب) لا شيء، فالاستمرار وحده لا يقرّر الاشتقاق

ج) أنّه غير اشتقاقي على I

ب. صحيح. الاستمرار شرط لازم للاشتقاق وليس كافياً، والفصل يحتاج حساب نهاية معدّل التغيّر عند كلّ نقطة مشكوك فيها.

مثال محلول: تابع مركّب

نجمع الآن كلّ ما سبق في مسألة واحدة من تمارين الكتاب. اقرأ الخطوة، اعمل على ورقتك، ثمّ اكشف الجواب.

المطلوب ثلاثة أشياء بالترتيب: مجموعة تعريف التابع f ، ثمّ دراسة استمراره على مجموعة تعريفه، ثمّ الجواب عن سؤال أخير: هل يكفي ذلك للحكم على اشتقاقه؟

$$f(x) = \sqrt{1 - \cos x}$$

1. نحدّد مجموعة التعريف الجذر يطلب مقداراً غير سالب تحته. ونعلم أنّ $\cos x \leq 1$ مهما كانت x ، فالمقدار $1 - \cos x$ غير سالب دائماً. إذن لا قيد على x .

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - \cos x \geq 0 \ \Rightarrow\ D_f = \mathbb{R}$$

2. نفكّك التابع إلى مركّب نسمّي الداخل u والخارج h ، فيصير f مركّباً منهما. هذه هي الخطوة التي تحوّل السؤال إلى قراءة في قائمة التوابع المرجعيّة.

$$u(x) = 1 - \cos x \quad , \quad h(t) = \sqrt{t} \quad , \quad f(x) = h\big(u(x)\big)$$

3. نحكم على الداخل التابع u فرق بين تابع ثابت وتابع جيب التمام، وكلاهما مستمرّ على $\mathbb{R}$. ففرقهما مستمرّ على $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq 1 - \cos x \leq 2$$

4. نحكم على الخارج التابع h هو الجذر التربيعي، وهو مستمرّ على $[0, +\infty[$. وقيم u كلّها في $[0, 2]$ ، أي داخل هذا المجال، فالتركيب مشروع.

$$u(\mathbb{R}) \subset [0, +\infty[$$

5. نستنتج الاستمرار مركّب تابعين مستمرّين مستمرّ. الداخل مستمرّ على $\mathbb{R}$ والخارج مستمرّ على مجال يحوي صورته، فالنتيجة مباشرة.

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \lim_{x \to a} h\big(u(x)\big) = h\big(u(a)\big)$$

6. نجيب عن سؤال الاشتقاق لا يكفي. الاستمرار لا يقرّر الاشتقاق، والمواضع المشكوك فيها هنا هي النقاط التي ينعدم عندها ما تحت الجذر، أي $x = 2k\pi$ ، لأنّ الجذر نفسه غير اشتقاقي عند الصفر. والفصل في هذه النقاط يحتاج حساب نهاية معدّل التغيّر، كما فعلنا مع $\sqrt{x}$.

$$1 - \cos x = 0 \iff x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

الترتيب ثابت في كلّ سؤال استمرار: حدّد مجموعة التعريف، فكّك التابع إلى توابع مرجعيّة، ثمّ استعمل العمليّات والتركيب. التعريف نفسه لا نلجأ إليه إلا عند نقطة عنيدة.

$$\lim_{x \to a} u(x) = u(a)\ ,\ \lim_{t \to u(a)} h(t) = h\big(u(a)\big) \ \Rightarrow\ \lim_{x \to a} h\big(u(x)\big) = h\big(u(a)\big)$$

تذكّر: الاستمرار هو الشرط الذي يفتح الدرس التالي. من دونه لا مبرهنة القيمة الوسطى ولا ضمان لوجود حلّ للمعادلة $f(x) = k$ ، ومعه ومع الاطّراد التامّ يصير الحلّ موجوداً ووحيداً.

المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 42 إلى 44 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.