بسيطة

الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

التوابع المستمرّة وحلّ المعادلات

متى يوجد حلّ، وكم عدد الحلول، ومفهوم التابع العكسي

التوابع: النهايات والاستمرار . الوحدة 2 . الدرس 8

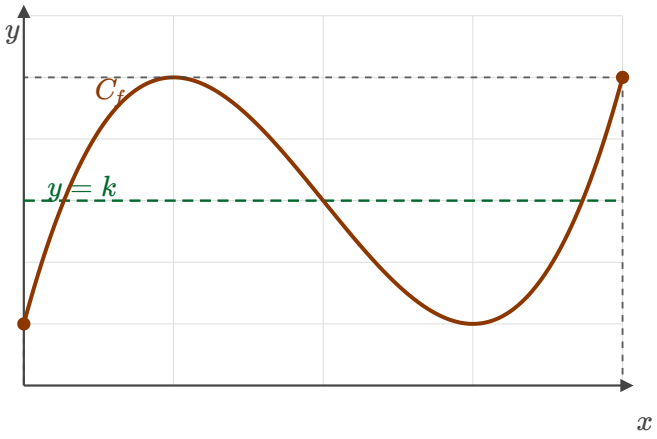
تعرف كيف تحلّ معادلة من الدرجة الثانية، وكيف تحلّ معادلة كسريّة. لكن ماذا تفعل أمام معادلة مثل $x^3 - 2x^2 - 1 = 0$ ، وليس لجذورها صيغة جاهزة؟ في هذا الدرس نغيّر السؤال: بدل أن نطلب الحلّ نفسه، نسأل أوّلاً هل يوجد حلّ، ثمّ كم عدد الحلول، ثمّ في أيّ مجال يقع كلّ منها. والجواب يأتي من خاصّتين درسناهما: الاستمرار يعطي الوجود، والاطّراد التامّ يعطي الوحدانيّة. هذا الدرس هو أطول دروس الوحدة، وهو حصادها كلّه.

المعادلة بوصفها تقاطعاً

للمعادلة $f(x) = k$ قراءة هندسيّة واحدة لا تتغيّر. ارسم الخطّ البياني C_f ، ثمّ ارسم المستقيم d الذي معادلته $y = k$ ، وهو مستقيم أفقي. كلّ نقطة مشتركة بين الخطّين تعطي حلّاً، وفاصلة تلك النقطة هي الحلّ نفسه.

$$f(x) = k \iff M\big(x,\ f(x)\big) \in C_f \cap d, \qquad d : y = k$$

وبهذه القراءة صار السؤال بصريّاً: البحث عن الحلول هو البحث عن نقاط التقاطع، وعدد الحلول هو عدد تلك النقاط. انظر إلى الشكل الآتي، ثمّ عدّ بنفسك.



على المجال $[0, 4]$ ، والخطّان المتقطّعان يبيّنان $f(4) = 5$. المستقيم $y = 3$ يقطع C_f في ثلاث نقاط، ففواصلها الثلاث هي حلول المعادلة $f(x) = 3$ ، وهي $2 - \sqrt{3}$ و 2 و $2 + \sqrt{3}$.

الشكل يطرح سؤالين مختلفين، ومن الخلط بينهما تأتي أكثر أخطاء هذا الدرس. الأوّل: هل يوجد تقاطع أصلاً، أي هل للمعادلة حلّ. والثاني: كم عدد نقاط التقاطع، أي كم عدد الحلول. ولكلّ سؤال أداته الخاصّة، ولا تغني إحداهما عن الأخرى.

تذكّر: الاستمرار يعطي الوجود، والاطّراد التامّ يعطي الوحدانيّة. من حفظ هذين السطرين ملك مفتاح الدرس كلّه.

للتابع f خطّ بياني C_f . ما الشيء الهندسي الذي يقابل حلول المعادلة $f(x)=5$ ؟

أ) فواصل النقاط المشتركة بين C_f والمستقيم $y=5$

ب) النقاط المشتركة بين C_f والمستقيم $x=5$

ج) تراتيب النقاط المشتركة بين C_f ومحور الفواصل

أ. صحيح. النقطة المشتركة ترتيبها 5 وفاصلتها هي x التي تحقّق $f(x)=5$ ، فالحلّ هو الفاصلة.

مبرهنة القيمة الوسطى

قلنا في درس الاستمرار إنّ الخطّ البياني لتابع مستمرّ على مجال يُرسم قطعةً واحدة، دون رفع القلم. اجعل هذه الصورة أمامك: القلم ينطلق من الارتفاع $f(a)$ وينتهي عند الارتفاع $f(b)$ ، ولا يُرفع في الطريق. إذن كلّ ارتفاع محصور بين هذين الارتفاعين لا بدّ أن يُعبَر مرّة واحدة على الأقلّ.

هذا كلّ مضمون مبرهنة القيمة الوسطى. والكتاب يقبلها دون إثبات.

مبرهنة 6

الفرض: f تابع مستمرّ على المجال $[a,b]$ ، و y عدد حقيقي محصور بين $f(a)$ و $f(b)$. $f(a)\le y\le f(b)$

النتيجة: يوجد على الأقلّ عدد حقيقي c محصور بين a و b يحقّق $f(c)=y$. $\exists\, c\in[a,b]:\ f(c)=y$

صياغة أخرى للمبرهنة نفسها حين $f(a)\le f(b)$ ، حيث $I=[a,b]$ و $f(I)$ هي مجموعة صور عناصر I وفق f . $[f(a),\ f(b)]\subset f(I)$

الكتاب، الصفحة 45

انتبه: الكتاب يكتب «يوجد على الأقلّ»، ويضيف صراحةً أنّ العدد c ليس وحيداً بالضرورة. في شكل الفقرة السابقة كان للمعادلة $f(x)=3$ ثلاثة حلول، وكلّها من المجال $[0,4]$ ، والتابع مستمرّ. من استنتج الوحدانيّة من هذه المبرهنة وحدها فقد نسب إليها ما ليس فيها.

وشرط الاستمرار ليس زينة في نصّ المبرهنة. الكتاب يعطي تابعاً معرّفاً على $[1,4]$ وغير مستمرّ، خطّه البياني قطعتان بينهما قفزة عند 2 . المعادلة $f(x)=4$ لها حلّ، أمّا المعادلة $f(x)=2$ فلا حلّ لها، مع أنّ العدد 2 محصور بين $f(1)=0$ و $f(4)=5$. القفزة عبرت فوق العدد 2 دون أن تبلغه.

تذكّر: قبل استعمال المبرهنة يُتحقّق من الاستمرار على المجال المغلق كلّه، لا من تبدّل الإشارة وحده. تبدّل الإشارة دون استمرار لا يعطي شيئاً.

التابع f مستمرّ على $[-1,3]$ ، و $f(-1)=-4$ و $f(3)=7$. ماذا تستنتج عن المعادلة $f(x)=0$ ؟

أ) لها حلّ وحيد في $[-1,3]$

ب) لها حلّ واحد على الأقلّ في $[-1,3]$

ج) لا يمكن قول شيء قبل حساب المشتقّ

ب. صحيح. العدد 0 محصور بين -4 و 7 ، والتابع مستمرّ على المجال المغلق، فمبرهنة القيمة الوسطى تعطي حلّاً واحداً على الأقلّ.

الاطّراد التامّ يعطي الوحدانيّة

ننتقل إلى السؤال الثاني: كم عدد الحلول. تصوّر تابعاً متزايداً تماماً على مجال I . التزايد التامّ معناه أنّ $x_1<x_2$ يعطي دائماً $f(x_1)<f(x_2)$ ، فلا يمكن لعددين مختلفين من I أن تكون لهما الصورة نفسها. وإذا كان لكلّ صورة أصلٌ واحد على الأكثر، فللمعادلة $f(x)=y$ حلّ واحد على الأكثر.

اجمع هذا مع مبرهنة القيمة الوسطى: تلك أعطت حلّاً واحداً على الأقلّ، وهذا يعطي حلّاً واحداً على الأكثر. فالنتيجة حلّ واحد وواحد فقط. لاحظ أنّ كلّ نصف من الجواب جاء من فرض مختلف.

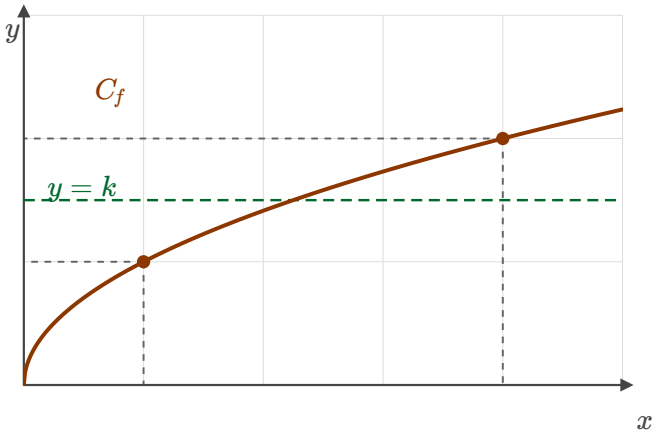
مبرهنة 7

إذا كان f مستمرّاً ومتزايداً تماماً على $I=[a,b]$ ، فصورة المجال هي هذا المجال المغلق بالضبط، لا أوسع ولا أضيق. $f(I)=[f(a),\ f(b)]$

أيّاً كان y من $[f(a),f(b)]$ ، فللمعادلة $f(x)=y$ حلّ واحد وواحد فقط في I . $\forall\, y\in f(I)\quad \exists!\, x\in I:\, f(x)=y$

وإذا كان f متناقصاً تماماً بُدِّل طرفا الصورة، والباقي كما هو. $f(I)=[f(b),\ f(a)]$

الكتاب، الصفحة 46



$f(x) = \sqrt{x}$ مستمرّ ومتزايد تماماً على $I = [1, 4]$ ، فصورته $f(I) = [1, 2]$. المستقيم $y = 1.5$ يقطع C_f في نقطة واحدة لا غير، وفاصلتها 2.25 هي الحلّ الوحيد.

وأكثر ما يُستعمل في الامتحان حالة خاصّة واحدة: $y = 0$ ، أي البحث عن جذر. الكتاب يفردها في نتيجة مستقلّة.

نتيجة

الفرض كما كتبه الكتاب: f مستمرّ ومطّرد على المجال $I = [a, b]$ ، وقيمتاه عند الطرفين مختلفتا الإشارة.

$f(a) \times f(b) < 0$ عندئذ للمعادلة $\exists!\, c \in [a, b] : f(c) = 0$ حلّ وحيد في I . وإثبات الكتاب يردّها إلى المبرهنة 7 مع $y = 0$ ، لأنّ الشرط $f(a) \times f(b) < 0$ يعني أنّ 0 واقع بين $f(a)$ و $f(b)$.

الكتاب، الصفحة 46

انتبه: نصّ النتيجة في الكتاب يقول «مطّرداً» دون كلمة «تماماً»، بينما الإثبات يستند إلى المبرهنة 7 التي تشترط «مطّرداً تماماً». المقصود هو الاطّراد التامّ، والكلمة الناقصة ليست تخفيفاً للشرط. وبغير «تماماً» قد تكون مجموعة الحلول مجالاً كاملاً: الكتاب نفسه يعطي تابعاً مطّرداً غير مطّرد تماماً، فيه كلّ قيم المجال $[2, 3]$ حلول للمعادلة $f(x) = 1$.

يبقى سؤال عمليّ: كيف نتحقّق من أنّ التابع متزايد تماماً على مجال؟ في التمارين يُعطى جدول التغيّرات جاهزاً، فنقرأ منه الاطّراد مباشرةً. وحين لا يُعطى نبني الجدول من إشارة المشتقّ f' . الاشتقاق موضوع الوحدة الثالثة من هذا الكتاب، ويُفترض معروفاً من صفّ سابق، ولهذا يستعمله الكتاب هنا دون أن يشرحه. إن لم تكن قد درسته بعد فاقرأ الجدول كما يُعطى لك، وعُد إلى بنائه بعد وحدة الاشتقاق.

تذكّر: الترتيب في كلّ مسألة واحد: استمرار على المجال المغلق، ثمّ اطّراد تامّ عليه، ثمّ موقع العدد k من صورة المجال. ثلاثة أسطر، ولكلّ سطر منها درجاته في سلّم التصحيح.

التابع f مستمرّ ومتناقص تماماً على $I=[0,5]$ ، و $f(0)=9$ و $f(5)=-1$. كم عدد حلول المعادلة $f(x)=4$ في I ؟

أ) لا حلّ، لأنّ التابع متناقص
ب) حلّان على الأقلّ
ج) حلّ وحيد

ج. صحيح. صورة المجال هي $f(I)=[f(5),\ f(0)]=[-1,9]$ ، والعدد 4 ينتمي إليها، والاطّراد تامّ، فالحلّ موجود ووحيد.

مثال الكتاب: معادلة من الدرجة الثالثة

نجمع الآن كلّ ما سبق في مثال الكتاب نفسه. اقرأ الخطوة، نفّذها على ورقتك، ثمّ اكشف الجواب. لاحظ أنّ الهدف ليس إيجاد قيمة الحلّ، بل إثبات وجوده ووحدانيّته ثمّ حصره بين عددين.

التابع f معرّف على مجموعة الأعداد الحقيقية. والمطلوب: إثبات أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حلّاً وحيداً c في المجال $[2,3]$ ، وأنّه لا حلّ لها سواه، ثمّ حصر c بين عددين بواسطة المماس والقاطع.

$$f(x)=x^3-2x^2-1$$

1. نتحقّق من الاستمرار التابع كثير حدود، وكثيرات الحدود مستمرّة على مجموعة الأعداد الحقيقية كلّها. إذن هو مستمرّ على $[2,3]$ ، وشرط مبرهنة القيمة الوسطى متحقّق قبل أيّ حساب.

$$D_f=\mathbb{R}$$

2. نقرأ جدول التغيّرات المشتقّ $f'(x)=3x^2-4x=x(3x-4)$ ينعدم عند 0 وعند $\frac{4}{3}$ ، فيعطي الجدول الآتي. وهو الجدول نفسه المطبوع في الكتاب.

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\frac{59}{27}$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$

3. نطبّق على المجال المطلوب على $[2,3]$ التابع مستمرّ ومتزايد تماماً، لأنّ 2 أكبر من $\frac{4}{3}$. وقيمتاه عند الطرفين مختلفتا الإشارة، فتنطبق النتيجة حرفاً بحرف.

$$f(2)=-1,\quad f(3)=8,\quad f(2)\times f(3)<0\ \Rightarrow\ \exists!\, c\in\,]2,3[$$

4. نبيّن أنّه لا حلّ آخر الجدول يعطي أكثر من الوحدانيّة على مجال واحد. أكبر قيمة يبلغها التابع قبل 2 هي $f(0)=-1$ ، فالتابع سالب تماماً على $]-\infty,2]$. وبعد 3 هو متزايد انطلاقاً من $f(3)=8$ ، فهو موجب على $[3,+\infty[$. إذن لا جذر خارج $]2,3[$.

$$\forall\, x\in\,]-\infty,2]: f(x)<0, \qquad \forall\, x\in[3,+\infty[: f(x)>0$$

5. نحصر الحلّ بالمماس معادلة المماس T عند النقطة $M(2,-1)$ هي $y=f'(2)(x-2)+f(2)$ ، ومنها فاصلة تقاطعه مع محور الفواصل، ونسمّيها α .

$$T: y=4x-9, \qquad \alpha=\frac{9}{4}, \qquad f(\alpha)=\frac{17}{64}>0$$

6. نحصر الحلّ بالقاطع القاطع S يمرّ بالنقطتين $M(2,-1)$ و $N\left(\frac{9}{4},\ \frac{17}{64}\right)$ ، وفاصلة تقاطعه مع محور الفواصل تُسمّى β . وقيمة التابع عندها سالبة، فيقع c بين العددين.

$$S: y=\frac{81}{16}x-\frac{89}{8}, \qquad \beta=\frac{178}{81}, \qquad f(\beta)=-\frac{24497}{81^3}<0$$

7. نرتّب ونستنتج الحصر قيمة التابع سالبة عند β وموجبة عند α ، والتابع متزايد تماماً هناك، فالجذر بينهما. وهذا حصر عددي للحلّ دون حسابه.

$$\beta=\frac{178}{81}<c<\frac{9}{4}=\alpha$$

الوجود من الاستمرار مع تبدّل الإشارة، والوحدانيّة من الاطّراد التامّ، ونفي الحلول الأخرى من قراءة بقيّة سطور الجدول.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\\ f(a)\times f(b)<0\end{array}\right\}\ \Longrightarrow\ \exists!\, c\in\,]a,b[: f(c)=0$$

صورة مجال وعدد الحلول

المبرهنة 7 أعطتنا صورة المجال المغلق $[a,b]$. لكنّ المجالات في التمارين ليست كلّها مغلقة: قد يكون الطرف مفتوحاً، وقد يكون $-\infty$ أو $+\infty$. عندها لا وجود للقيمة $f(a)$ أصلاً، وتقوم النهاية مقامها.

مبرهنة 8

الحالة الأولى: الطرفان عددان وينتميان إلى I ، فتُحسب الصورة من القيمتين. $I=[a,b] \Rightarrow f(I)=[f(a),\ f(b)]$

الطرف الأيسر مفتوح، فلا قيمة له، وتحلّ النهاية محلّها ويبقى القوس مفتوحاً. $I=]a,b] \Rightarrow f(I)=]\lim_{x\to a} f(x),\ f(b)]$

والحالة المقابلة عند الطرف الأيمن. $I=[a,b[\Rightarrow f(I)=[f(a),\ \lim_{x\to b} f(x)[$

وحين يكون الطرفان مفتوحين تُستعمل نهايتان. $I=]a,b[\Rightarrow f(I)=]\lim_{x\to a} f(x),\ \lim_{x\to b} f(x)[$

الجدول مكتوب من أجل f مستمرّ ومتزايد تماماً. وإذا كان متناقصاً تماماً بُدِّل طرفا الصورة. $a,\ b \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,\ +\infty\}$

ويجوز أن يكون a أو b لا نهائيّاً، وعندئذ يكون القوس عند ذلك الطرف مفتوحاً حتماً، ولا قيمة للتابع عنده.

الكتاب، الصفحة 48

انتبه: عند الطرف المفتوح لا تكتب $f(a)$ ، فالعدد a لا ينتمي إلى المجال ولا قيمة للتابع عنده. تُكتب النهاية، ويبقى قوس الصورة مفتوحاً من تلك الجهة. سلالم التصحيح تخصم على القوس الخاطئ خصماً مستقلّاً عن خصم القيمة.

انتبه: وإذا لم يكن التابع مطّرداً فلا تكتب $f([a,b])=[f(a),\ f(b)]$. هذا خطأ يذكره الكتاب نصّاً في فقرة الأخطاء التي يجب تجنّبها. صورة المجال المغلق وفق تابع مستمرّ تبقى مجالاً مغلقاً حتى بلا اطّراد، لكنّ طرفيه هما القيمة الصغرى m والقيمة العظمى M ، لا قيمتا الطرفين.

$$f([a,b])=[m,\ M]$$

وبهذه المبرهنة يصير عدّ الحلول عملاً منظّماً لا تخميناً من الرسم. الطريقة أربع خطوات: نقسّم مجموعة التعريف إلى مجالات اطّراد، ثمّ نحسب صورة كلّ مجال، ثمّ نسأل في كلّ مرّة هل ينتمي العدد المطلوب إلى تلك الصورة، ثمّ نجمع. المثال الآتي هو مثال الكتاب.

التابع f معرّف ومستمرّ على مجموعة الأعداد الحقيقية، وجدول تغيّراته هو المعطى الوحيد. والمطلوب: عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ على مجموعة الأعداد الحقيقية.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	3

1. نقسّم إلى مجالات اطّراد كلّ سهم في الجدول مجال اطّراد تامّ واحد. نكتب المجالات الثلاثة كما كتبها الكتاب، بأطراف مفتوحة عند اللّانهاية وعند الحدود الداخليّة التي أُخذت مرّة واحدة.

$$I_1=]-\infty,-1[\,,\quad I_2=[-1,2]\,,\quad I_3=]2,+\infty[$$

2. نحسب صورة كلّ مجال التابع متناقص تماماً على I_1 و I_3 ، ومتزايد تماماً على I_2 . نطبّق المبرهنة 8 ثلاث مرّات، مع الانتباه إلى الأقواس.

$$J_1 =]-2, +\infty[\,, \quad J_2 = [-2, 4]\,, \quad J_3 =]3, 4[$$

3. نسأل عن انتماء الصفر على كلّ مجال اطّراد تامّ للمعادلة حلّ واحد إن انتمى 0 إلى الصورة، ولا حلّ إن لم ينتمِ. والعدد 0 ينتمي إلى J_1 وإلى J_2 ، ولا ينتمي إلى J_3 لأنّ كلّ عناصر J_3 أكبر من 3 .

$$0 \in J_1, \quad 0 \in J_2, \quad 0 \notin J_3$$

4. نجمع حلّ وحيد x_1 في I_1 ، وحلّ وحيد x_2 في I_2 ، ولا حلّ في I_3 . إذن للمعادلة حلّان اثنان لا غير على مجموعة الأعداد الحقيقية.

$$f(x_1) = f(x_2) = 0, \qquad x_1 \in I_1,\ x_2 \in I_2$$

عدد الحلول لا يُخمَّن من شكل الرسم. يُقسَّم المجال إلى مجالات اطّراد، وتُحسب صورة كلّ منها، ويُسأل عن انتماء العدد المطلوب، ثمّ يُجمع.

$$k \in f(I_j) \;\Rightarrow\; \exists!\, x \in I_j : f(x) = k$$

مفهوم التابع العكسي

لنقف عند العبارة «حلّ واحد وواحد فقط» وقفة أخيرة. إذا كان f مستمرّاً ومطّرداً تماماً على مجال I ، ووضعنا $J = f(I)$ ، فلكلّ y من J أصلٌ واحد لا غير في I . أي إنّ الطريق من y إلى x طريق وحيد أيضاً، فيمكن أن نجعله تابعاً بدوره.

الشرطان اللذان يجعلان ذلك ممكناً هما: كلّ عنصر من I له صورة في J ، وكلّ عنصر من J له أصل واحد فقط في I . حين يتحقّقان نقول إنّ f تقابل من I إلى J .

التابع العكسي

تعريف التابع العكسي g المعرّف على $J = f(I)$: صورة y وفق g هي الحلّ الوحيد للمعادلة $f(x) = y$. $g(y) = x \iff f(x) = y$

$f(g(y)) = y, \qquad g(f(x)) = x,$ أيّاً كان x من I وأيّاً كان y من J . كلّ من التابعين يردّ ما فعله الآخر.

الرمز المعتاد للتقابل العكسي، والعلاقة متبادلة: عكس العكس هو التابع نفسه. $f = g^{-1} \iff g = f^{-1}$

الكتاب، الصفحة 49

وللتابع العكسي صورة هندسيّة بسيطة. النقطتان $M(x,y)$ و $M'(y,x)$ متناظرتان بالنسبة إلى المستقيم d الذي معادلته $y=x$. وبما أنّ $y=f(x)$ يكافئ $x=g(y)$ ، فكلّ نقطة من C_f نظيرتها نقطة من C_g ، والعكس بالعكس. إذن الخطّان البيانيان متناظران بالنسبة إلى d ، شرط أن يكون المعلم متجانساً.

انتبه: التابع العكسي ليس مقلوب التابع. $f^{-1}(y)$ هو حلّ المعادلة $f(x)=y$ ، أمّا $\frac{1}{f(y)}$ فعدد آخر تماماً. الرمز نفسه في الحالتين، والمعنى مختلف، والخلط بينهما يفسد المسألة من سطرها الأوّل.

ومثال الكتاب الختامي هو أوضح مثال ممكن: التابع $x\mapsto x^2$ والتابع $x\mapsto\sqrt{x}$ ، وكلاهما مستمرّ ومتزايد تماماً على $I=[0,+\infty[$. وضع $y=x^2$ يعطي $x=\sqrt{y}$ ، والعكس صحيح، فكلّ منهما تقابل عكسي للآخر، وخطّاهما البيانيان متناظران بالنسبة إلى المستقيم $y=x$.

تذكّر: الوحدانيّة ليست نتيجة تُكتب في آخر السطر وتُنسى. هي التي تسمح بالعودة من الصورة إلى الأصل، ومنها يولد التابع العكسي كلّه.

المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 45 إلى 51 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.