بسيطة

الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

العمليّات على النهايات

كيف نحسب نهاية مجموع وجداء وكسر، ومتى يعجز الجدول عن الجواب

التوابع: النهايات والاستمرار . الوحدة 2 . الدرس 3

تعلّمنا حتى الآن نهايات توابع بسيطة، واحداً واحداً. لكنّ التوابع التي تأتي في الامتحان مركّبة من قطع: مجموع، جداء، كسر. والسؤال الطبيعي هو: إذا عرفنا نهاية كلّ قطعة، هل نعرف نهاية المجموع؟ الجواب نعم في معظم الحالات، وهذه هي جداول هذا الدرس. لكنّ أربع حالات تبقى خارج الجداول، وهي التي يلزمها عملٌ إضافيّ قبل أن ينطبق الجدول. في هذا الدرس نتعلّم الجداول أوّلاً، ثمّ نتعلّم ماذا نفعل حين تصمت.

نهاية المجموع

المبرهنات التي يعرضها الكتاب في جداول تفيد في حساب نهايات التوابع $f+g$ و fg و $\frac{f}{g}$ إذا كنّا نعرف نهاية f ونهاية g . وهي تعمل في المواضع الثلاثة كلّها من غير تغيير: عند $+\infty$ ، وعند $-\infty$ ، وعند نقطة a من الأعداد الحقيقية. لهذا تُكتب في الجداول من دون ذكر الموضع.

معظم الخانات سهلة التوقّع بالحدس. خذ هذه الحالة: إذا كان $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$ وكان $\lim_{x\to 1} g(x) = 3$ ، فقيم f تكبر بلا حدّ وقيم g تتجمّع حول 3 ، فمجموعهما يكبر بلا حدّ أيضاً. إضافة عدد ثابت لا تكبح شيئاً يكبر بلا حدّ.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty \ \wedge \ \lim_{x\to 1} g(x) = 3 \implies \lim_{x\to 1} (f+g)(x) = +\infty$$

وهكذا تُقرأ كلّ خانة من الجدول: لا حفظاً، بل بالسؤال «ماذا يفعل الكبير مع الصغير هنا». يبقى موضع واحد يعجز الحدس عنه: أن يكبر أحد التابعين نحو $+\infty$ ويكبر الآخر نحو $-\infty$. عندئذ يتنازع الطرفان، والنتيجة تتوقّف على أيّهما أسرع.

انظر إلى ثلاثة أمثلة، كلّها من الصيغة نفسها عند $+\infty$: في $x - x$ يتعادل الطرفان فالنتيجة 0 ، وفي $x^2 - x$ يسبق المربّع فالنتيجة $+\infty$ ، وفي $x - x^2$ تنقلب فتصير $-\infty$. ثلاث نتائج مختلفة من شكل واحد، وهذا بالضبط معنى أنّ الخانة لا تُقرأ.

نهاية المجموع

$\lim f = \ell\,,\ \lim g = \ell' \implies \lim(f+g) = \ell + \ell'$ حيث ℓ و ℓ' عددان حقيقيان.

$\lim f = \ell\,,\ \lim g = \pm\infty \implies \lim(f+g) = \pm\infty$ العدد الثابت لا يغيّر شيئاً أمام ما يكبر بلا حدّ.

$\lim f = +\infty\,,\ \lim g = +\infty \implies \lim(f+g) = +\infty$

$\lim f = -\infty\,,\ \lim g = -\infty \implies \lim(f+g) = -\infty$

$\lim f = +\infty\,,\ \lim g = -\infty$ الخانة الحمراء الوحيدة في هذا الجدول. لا نتيجة، وهي حالة عدم تعيين نكتبها $+\infty - \infty$.

الكتاب، الصفحة 29

انتبه: الخانة الحمراء لا تعني «النهاية غير موجودة»، ولا تعني 0 . تعني أنّ معرفة نهاية f ونهاية g وحدها لا تكفي، وأنّ على الحلّ أن يعود إلى الصيغة نفسها ويعيد كتابتها. النهاية قد تكون موجودة تماماً، كما في $x^2 - x$.

الجداء والكسر

جدول الجداء يتبع قاعدة الإشارات المعروفة. إذا كانت نهاية f عدداً غير معدوم ونهاية g لا نهائية، فنهاية الجداء لا نهائية، وإشارتها حاصل ضرب الإشارتين. وإذا كانت النهايتان لا نهائيتين معاً، فالأمر نفسه.

نهاية الجداء

$\lim f = \ell\,,\ \lim g = \ell' \implies \lim(fg) = \ell \cdot \ell'$

$\lim f = \ell > 0\,,\ \lim g = \pm\infty \implies \lim(fg) = \pm\infty$

$\lim f = \ell < 0\,,\ \lim g = \pm\infty \implies \lim(fg) = \mp\infty$ العامل السالب يقلب الإشارة.

$\lim f = \pm\infty\,,\ \lim g = \pm\infty \implies \lim(fg) = +\infty$ حين تتّفق الإشارتان، كما في ضرب سالبين.

$\lim f = \pm\infty\,,\ \lim g = \mp\infty \implies \lim(fg) = -\infty$ حين تختلف الإشارتان. القاعدة في السطرين واحدة: الإشارة حاصل ضرب الإشارتين.

$\lim f = 0\,,\ \lim g = \pm\infty$ الخانة الحمراء الوحيدة هنا، وهي حالة عدم التعيين $0 \times (\pm\infty)$.

الكتاب، الصفحة 29

أمّا الكسر $\frac{f}{g}$ فالكتاب يقسمه إلى حالتين، والفرق بينهما هو مفتاح الدرس كلّه: هل نهاية المقام معدومة أم لا. إذا لم تكن معدومة، فالجدول يشبه جدول الجداء تماماً، ويُضاف إليه سطر واحد جديد: عدد منتهٍ مقسوم على شيء يكبر بلا حدّ يعطي 0 .

نهاية الكسر، حين لا تنعدم نهاية المقام

$\lim f = \ell\ ,\ \lim g = \ell' \neq 0 \implies \lim \frac{f}{g} = \frac{\ell}{\ell'}$

$\lim f = \ell\ ,\ \lim g = \pm\infty \implies \lim \frac{f}{g} = 0$ عدد ثابت مقسوم على مقام يكبر بلا حدّ يصغر ويتجمّع حول 0 .

$\lim f = \pm\infty\ ,\ \lim g = \ell' > 0 \implies \lim \frac{f}{g} = \pm\infty$

$\lim f = \pm\infty\ ,\ \lim g = \ell' < 0 \implies \lim \frac{f}{g} = \mp\infty$ المقام السالب يقلب الإشارة. القاعدة في السطرين واحدة: الإشارة حاصل قسمة الإشارتين.

$\lim f = \pm\infty\ ,\ \lim g = \pm\infty$ الخانة الحمراء، وهي حالة عدم التعيين $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

الكتاب، الصفحة 29

وتبقى الحالة الحرجة: نهاية المقام معدومة. هنا لا تكفي النهاية وحدها، وهذا ما يميّز جدول الكتاب الرابع عن الثلاثة قبله. انظر إلى $\frac{1}{x}$ عند الصفر: المقام يقترب من 0 في الحالتين، ومع ذلك تكون النهاية $+\infty$ من اليمين و $-\infty$ من اليسار. الفرق ليس في نهاية المقام، بل في إشارة قيمه.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

لهذا يكتب الكتاب في سطر المقام عبارتين لا واحدة: 0 وقيم g موجبة، أو 0 وقيم g سالبة. من دون هذه الزيادة لا يوجد جواب أصلاً.

نهاية الكسر، حين تنعدم نهاية المقام

$\lim f > 0\ ,\ \lim g = 0^+ \implies \lim \frac{f}{g} = +\infty$ اختصارٌ لقول الكتاب: النهاية 0 وقيم g موجبة. وشرط $\lim f > 0$ يشمل العدد الموجب و $+\infty$ معاً.

$\lim f > 0\ ,\ \lim g = 0^- \implies \lim \frac{f}{g} = -\infty$

$\lim f < 0\ ,\ \lim g = 0^+ \implies \lim \frac{f}{g} = -\infty$

$\lim f < 0\ ,\ \lim g = 0^- \implies \lim \frac{f}{g} = +\infty$

$\lim f = 0\ ,\ \lim g = 0$ الخانة الحمراء، وهي حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$ ، وهي التي تحتاج عملاً قبل الجدول.

الكتاب، الصفحة 29

انتبه: لا تكتب $\frac{2}{0} = \infty$ بلا إشارة. حين تنعدم نهاية المقام يجب دراسة إشارة g على يمين النقطة وعلى يسارها، ثمّ إعطاء نهايتين منفصلتين. والنهاية من الجهتين لا توجد إلّا إذا تساوت النهايتان الجانبيّتان.

ما نهاية هذا التابع حين تقترب x من 2 وهي أكبر من 2 ؟

$$f(x) = \frac{3}{x-2}$$

أ) $-\infty$
ب) $+\infty$
ج) 0

ب. صحيح. البسط 3 موجب، والمقام يقترب من 0 بقيم موجبة، فالكسر يكبر بلا حدّ نحو $+\infty$.

أربع صيغ لا تُقرأ من الجدول

جمعنا الآن الخانات الحمراء الأربع من الجداول الأربعة. حين نقع على إحداها لا نستطيع تحديد النهاية اعتماداً على الجداول، وتلزم دراسة أكثر تفصيلاً. هذه هي صيغ عدم التعيين.

صيغ عدم التعيين

$\infty - \infty$ من جدول المجموع: طرف يكبر نحو $+\infty$ وطرف نحو $-\infty$.

$0 \times (\pm\infty)$ من جدول الجداء: عامل يصغر نحو 0 وعامل يكبر بلا حدّ.

$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ من جدول الكسر حين لا تنعدم نهاية المقام.

$\frac{0}{0}$ من جدول الكسر حين تنعدم نهاية المقام.

الكتاب، الصفحة 30

تذكّر: هذه الكتابة رموزٌ لتسهيل الكلام عن حالات عدم التعيين، وليس لها معنى رياضي. الكسر $\frac{0}{0}$ مثلاً ليس كسراً أصلاً، إذ لا يجوز أن يكون المقام معدوماً.

والدليل على أنّه لا عدد وراء هذه الرموز بسيط. خذ ثلاثة توابع عند الصفر، كلّها من الصيغة $\frac{0}{0}$: الأوّل $\frac{x}{x}$ نهايته 1 ، والثاني $\frac{x^2}{x}$ نهايته 0 ، والثالث $\frac{x}{x^2}$ لا نهاية له عند الصفر أصلاً، إذ تكبر قيمه نحو $+\infty$ من اليمين ونحو $-\infty$ من اليسار. صيغة واحدة وثلاث نتائج مختلفة.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0 \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x^2}=+\infty$$

انتبه: أشهر خطأ في هذه الوحدة هو قراءة الصيغة كأنّها عدد: $\frac{0}{0} = 1$ أو $\frac{\infty}{\infty} = 1$ أو $+\infty - \infty = 0$. كلّها خاطئة. الصيغة اسمٌ لحالة، لا قيمة. الجواب لا يأتي إلّا بعد إعادة كتابة التابع.

علمنا أنّ $\lim f = 0$ وأنّ $\lim g = +\infty$ عند النقطة نفسها. ما نهاية الجداء fg ؟

أ) 0

ب) $+\infty$

ج) لا يعطي الجدول جواباً، وهي حالة عدم تعيين

ج. صحيح. هذه هي الخانة الحمراء $0 \times (\pm\infty)$. يجب إعادة كتابة الجداء قبل أيّ استنتاج.

ثلاث حيل لرفع عدم التعيين

الفكرة واحدة في الحيل الثلاث: التابع لا يتغيّر، بل تتغيّر صيغته. نبحث عن كتابة أخرى للتابع نفسه تكون أكثر ملاءَمة لحساب النهاية، ثمّ نطبّق الجداول على الصيغة الجديدة. الكتاب يعرض ثلاث حيل، وهي عُدّة هذا الدرس. وليست كلّ حالة عدم تعيين ترتفع بها، فبعضها يحتاج أدوات الدروس التالية.

الحيلة الأولى: إخراج عامل مشترك ثمّ الاختصار. مثال الكتاب هو $h(x) = \frac{x^2 - x}{\sin x}$ عند الصفر. نهاية البسط 0 ونهاية المقام 0 ، فالصيغة $\frac{0}{0}$. نُخرج x عاملاً مشتركاً في البسط، ثمّ نفصل الكسر إلى جزأين.

$$h(x) = \frac{x(x-1)}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} \times (x-1) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad , \quad v(x) = \frac{\sin x}{x} \ , \ u(x) = x - 1$$

ونستعمل هنا النتيجة $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ، وهي من نشاطٍ خارج هذه الدروس، نقبلها كما هي. إذن $\lim_{x \to 0} v(x) = 1$ و $\lim_{x \to 0} u(x) = -1$ ، ومقام نهايته 1 غير معدوم، فالجدول ينطبق أخيراً.

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \frac{-1}{1} = -1$$

الحيلة الثانية: الضرب بالمرافق. تُستعمل كلّما ظهر جذر في فرق. مثال الكتاب هو $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$ عند الصفر، وهو من الصيغة $\frac{0}{0}$ أيضاً. نضرب البسط والمقام بمرافق البسط $\sqrt{x+1} + 1$ ، فيختفي الجذر من البسط.

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{x+1-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$

المقام لم يعد ينعدم عند الصفر، بل نهايته 2 . فالنتيجة تُقرأ من الجدول مباشرة: $\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{2}$.

انتبه: انعدام المقام عند نقطة لا يعني وجود مقارب شاقولي هناك. في هذا المثال ينعدم المقام عند 0 ، ومع ذلك النهاية عدد منتهٍ هو $\frac{1}{2}$. لا يُحكم بالمقارب الشاقولي إلّا بعد الاختصار أو الضرب بالمرافق.

الحيلة الثالثة: إخراج الحدّ المُسيْطِر خارج قوسين. تُستعمل عند $+\infty$ و $-\infty$ وحدهما. مثال الكتاب هو $f(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{x+1}$ عند $+\infty$ ، وهو من الصيغة $\frac{+\infty}{+\infty}$. نُخرج x من البسط ومن المقام ونختصر، علماً أنّ $x>0$ في جوار $+\infty$.

$$f(x)=\frac{x\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x}}$$

وقد بقي داخل القوسين ما نعرف نهايته من القائمة المرجعيّة: $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$. إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$.

تذكّر: الترتيب واحد في الحيل الثلاث: نتعرّف على الصيغة أوّلاً، ثمّ نعيد كتابة التابع، ثمّ نطبّق الجدول. من طبّق الجدول قبل إعادة الكتابة كتب جواباً لا معنى له.

الحدّ المُسيْطِر عند اللّانهاية

الحيلة الثالثة تستحقّ أن تصير قاعدة، لأنّها تتكرّر في كلّ مسألة تحليل. والكتاب يضع القاعدتين في الصفحة 31 : نهايات توابع كثيرات الحدود ونهايات التوابع الكسريّة عند $+\infty$ أو $-\infty$.

الجواب الأوّل: عند $+\infty$ وكذلك عند $-\infty$ ، نهاية تابع كثير الحدود هي نفسها نهاية حدِّه المُسيْطِر، أي الحدّ الذي له أعلى درجة. لاحظ: أعلى درجة، لا أكبر أمثال. الحدّ $100x^3$ لا يسيطر على $-2x^4$ مهما بدا كبيراً.

مثال الكتاب على القاعدة الأولى. المطلوب نهاية هذا التابع كثير الحدود عند $+\infty$. احسب كلّ خطوة على ورقتك قبل أن تكشفها.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$$

1. نتعرّف على الصيغة عند $+\infty$ يكبر x^3 نحو $+\infty$ ، ويكبر $-2x^2$ نحو $-\infty$. فالمجموع من الصيغة $+\infty - \infty$ ، والجدول صامت.

$$+\infty - \infty$$

2. نعيّن الحدّ المُسيْطِر الدرجات هي 3 و 2 و 1 و 0 . أعلاها 3 ، فالحدّ المُسيْطِر هو x^3 .

$$x^3$$

3. نُخرجه خارج قوسين نقسم كلّ حدّ على x^3 داخل القوسين. انتبه إلى الحدّ الأخير: -1 مقسوماً على x^3 يعطي $-\frac{1}{x^3}$ ، لا $-\frac{1}{x}$.

$$f(x) = x^3\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)$$

4. نقرأ نهاية القوس كلّ كسر داخل القوس من القائمة المرجعيّة ونهايته 0 ، فيبقى 1 وحده. هذا هو معنى السيطرة: ما عدا الحدّ الأعلى درجة يذوب.

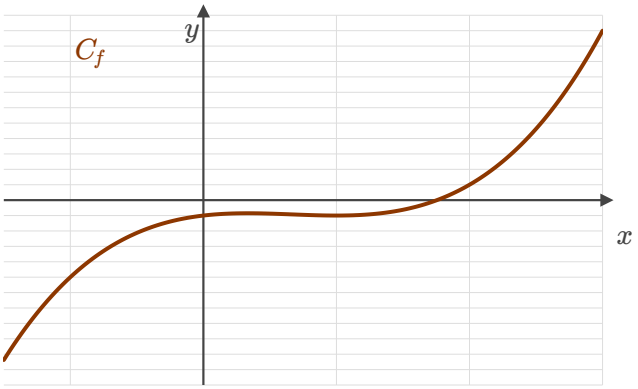
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = 1$$

5. نضرب بجدول الجداء صار عندنا جداء عاملين: الأوّل نهايته $+\infty$ والثاني نهايته 1 وهو عدد موجب. الخانة مقروءة الآن، ولا عدم تعيين فيها.

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \implies \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

نهاية كثير الحدود عند طرفي المحور هي نهاية حدِّه الأعلى درجة، وحده. الحدود الأخرى والأمثال لا أثر لها هناك.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(a_n x^n + \cdots + a_0\right) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$



$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$. قرب المبدأ تُرى آثار الحدود الصغرى وينحني الخطّ البياني، وكلّما ابتعدنا يميناً غلب x^3 وصعد الخطّ بلا حدّ.

الجواب الثاني يخصّ التوابع الكسريّة التي بسطها ومقامها كثيرا حدود. عند $+\infty$ أو $-\infty$ تساوي نهايةُ التابع الكسري نهايةَ قسمة الحدّ المُسيْطِر في البسط على الحدّ المُسيْطِر في المقام. والبرهان هو الحيلة الثالثة نفسها: نُخرج الحدّ المُسيْطِر خارج قوسين في كلٍّ من البسط والمقام، ونختصر، ثمّ نبحث عن النهاية.

قاعدة الحدّ المُسيْطِر

$\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$ حيث $a_n x^n$ هو الحدّ الأعلى درجة في كثير الحدود P .

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$ الحدّان المُسيْطِران وحدهما، ثمّ يُختصر الكسر قبل قراءة النهاية.

الكتاب، الصفحة 31

انتبه: القاعدتان صالحتان عند $+\infty$ و $-\infty$ فقط. عند نقطة a من الأعداد الحقيقية لا معنى لهما البتّة: هناك نعوّض a في التابع، فإن ظهرت صيغة عدم تعيين رجعنا إلى الاختصار أو المرافق. من كتب $\lim_{x\to 1}(x^3 - 2x^2 + x - 1) = \lim_{x\to 1} x^3 = 1$ فقد نقل قاعدة من مكانها، والجواب الصحيح -1 .

بهذه القاعدة صارت أسئلة «تدرّب» في الدرس الأوّل ممكنة. كانت هناك ستّة كثيرات حدود مطلوبة نهاياتها عند الطرفين، ولم تكن الأداة قد وصلت بعد. وهي الآن سطر واحد لكلّ منها: عيّن الحدّ الأعلى درجة، ثمّ اقرأ نهايته.

ما نهاية هذا التابع عند $+\infty$ ؟

$$f(x) = -2x^4 + 100x^3$$

أ) $-\infty$
ب) $+\infty$
ج) 98

أ. صحيح. الحدّ المُسيْطِر هو $-2x^4$ لأنّ درجته أعلى، ونهايته $-\infty$.

مثال الكتاب: تابع كسري عند اللّانهاية السالبة

نختم بمثال الكتاب الأخير، وهو تابع كسري عند $-\infty$. اخترناه لأنّه يجمع القاعدتين معاً ويُظهر أنّ الطرف السالب لا يحتاج حساباً جديداً، بل الانتباه نفسه إلى الإشارة.

المطلوب نهاية هذا التابع الكسري عند $-\infty$ ، أي حين تكون x سالبة وكبيرة بقيمتها المطلقة بقدر كافٍ.

$$f(x) = \frac{2x + 6}{x^2 - 3x + 1}$$

1. نتعرّف على الصيغة عند $-\infty$ يذهب البسط $2x + 6$ نحو $-\infty$ ، ويذهب المقام $x^2 - 3x + 1$ نحو $+\infty$ لأنّ درجته زوجيّة ومعامله الأعلى موجب. الشرطان معاً، فالدرجة وحدها لا تكفي. فالصيغة $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ، وهي عدم تعيين.

$$\frac{-\infty}{+\infty}$$

2. نعيّن الحدّين المُسيْطِرين في البسط الحدّ الأعلى درجة هو $2x$ ، وفي المقام هو x^2 . هذان وحدهما يقرّران النتيجة.

$$\frac{2x}{x^2}$$

3. نُخرجهما خارج قوسين نكتب كلّ حدّ آخر على شكل كسر مقامه قوّة من x ، فيبقى داخل القوسين ما نعرف نهايته.

$$f(x) = \frac{2x\left(1 + \frac{3}{x}\right)}{x^2\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}$$

4. نختصر نختصر x من x^2 ، فيبقى الكسر $\frac{2}{x}$ مضروباً بقوسين نهاية كلّ منهما 1 .

$$f(x) = \frac{2}{x} \cdot \frac{1 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

5. نقرأ النهايات الثلاث من القائمة المرجعيّة $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ ، فالكسر الأوّل نهايته 0 ، وكلّ قوس نهايته 1 .

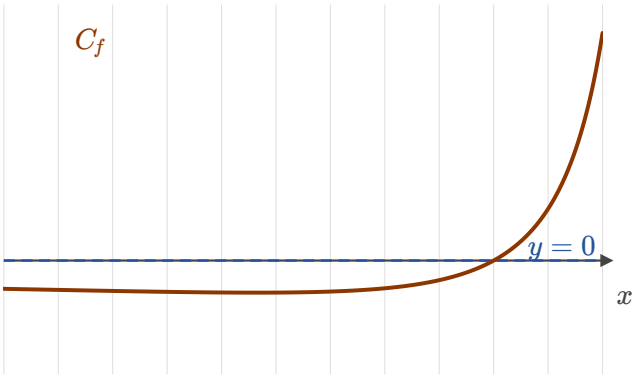
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0\,,\ \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)=1\,,\ \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=1$$

6. نضرب ونستنتج عندنا جداء عاملٍ نهايته 0 بعاملٍ نهايته عدد منتهٍ، فالجداء نهايته 0 . والمستقيم $y=0$ ، أي محور الفواصل، مقارب أفقي للخطّ البياني عند $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$$

حين تكون درجة المقام أعلى من درجة البسط، تكون النهاية عند الطرفين 0 ، ومحور الفواصل مقارب أفقي.

$$n<m\implies\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}=0$$



$f(x)=\dfrac{2x+6}{x^2-3x+1}$ على الجهة السالبة. لاحظ أنّ الخطّ البياني يقطع مقاربه عند $x=-3$ ، حيث ينعدم البسط، ثمّ يقترب منه من تحت. المقارب وصفٌ لما يحدث بعيداً، لا منعٌ للتقاطع.

تذكّر: ثلاثة أسئلة بالترتيب في كلّ نهاية: ما الصيغة، هل هي من صيغ عدم التعيين، وأيّ حيلة ترفعها. من بدأ بالجدول قبل هذه الأسئلة أخطأ، ومن بدأ بها لم يبق عليه إلّا الحساب.

المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 29 إلى 32 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.