

☆ بسيطة

الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

التوافيق

حين لا يهم الترتيب، تنقسم التراتيب إلى حزم متساوية
التحليل التوافقي . الوحدة 6 . الدرس 2

في الدرس السابق كان لكل خانة مكانها، و (a, b) غير (b, a) . فماذا لو لم يهم الترتيب أصلاً؟ لجنة من ثلاثة أشخاص هي اللجنة نفسها مهما رُتبت أسماءهم، وخمس بطاقات في يدك هي اليد نفسها مهما سحبتها بأيّ تتابع. هذا هو التوفيق: مجموعة جزئية، لا قائمة. والسؤال الذي يحلّ الدرس كلّ بسيط في صياغته: كم مرة عدّ الدرس السابق الشيء نفسه؟ الجواب $r!$ مرة، لأنّ الأشياء نفسها تُرتّب بـ $r!$ طريقة. فاقسم على $r!$ ، وقد وصلت.

تعريف التوافيق

أبدأ من الفرق، لا من الصيغة. القائمة تحمل الترتيب في طياتها، والمجموعة لا تحمله. ف (a, b) و (b, a) قائمتان مختلفتان، أما $\{a, b\}$ و $\{b, a\}$ فمجموعة واحدة كُتبت مرتين. وكلّ ما يأتي في هذا الدرس يقوم على هذه الجملة الواحدة.

تعريف 3

$0 \leq r \leq n$ لتكن E مجموعة مكونة من n عنصراً، وليكن r عدداً طبيعياً يُحقّق هذا الشرط.
 $E' \subset E$ نسّمّي توفيقاً يضمّ r عنصراً من E كل مجموعة جزئية مؤلفة من r عنصراً من E .
لاحظ الرقم في اسم الرتبة: عدّاد التعاريف يمشي عبر الوحدة كلّها، والتعريفان الأوّلان في الدرس السابق.

الكتاب، الصفحة 136

تذكّر: وهذه ملاحظة الكتاب، وهي مفتاح الدرس: ترتيب العناصر في المجموعة الجزئية غير مهم، ف $\{0, 1\}$ و $\{1, 0\}$ تمثّلان المجموعة نفسها. ومن هنا القاعدة العملية التي تسبق كلّ حساب: أسأل نفسك هل يتغيّر الجواب إذا غيّرت مواضع العناصر. إن تغيّر فأنت أمام ترتيب، وإن لم يتغيّر فأنت أمام توفيق.

مثال الكتاب صفحة 136، وهو لا يحسب شيئاً بل يعدّ بالاسم. لتكن $E = \{a, b, c\}$. ما التوافيق التي تضمّ عنصرين من E ؟

$$E = \{a, b, c\}, \quad r = 2$$

1. ① اكتبها كلها، فهي قليلة خذ كل زوج من الحروف الثلاثة: a مع b ، ثم b مع c ، ثم a مع c . وهذا ترتيب الكتاب نفسه.

$$\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}$$

2. ② ولا تغدّ الواحدة مرتين لماذا لا نكتب $\{b, a\}$ أيضاً؟ لأنّها $\{a, b\}$ نفسها. لو عدناها لخرج العدد 6، وهو عدد الترتيب لا عدد التوافيق.

$$\{a, b\} = \{b, a\}$$

3. ③ العدّ ثلاث مجموعات جزئية، لا أكثر ولا أقل. وسيأخذ هذا العدد رمزاً في الفقرة التالية مباشرة.

$$3$$

والفرق بالأرقام: من $\{a, b, c\}$ تخرج ثلاثة توافيق ثنائية وستة ترتيبات طولها اثنان. النسبة بينهما $2! = 2$ ، وهذا ليس مصادفة بل هو الدرس كلّ في رقم واحد.

$$P_3^2 = 6 = 3 \times 2!$$

ترميز

$\binom{n}{r}$ نرمز بهذا الرمز إلى عدد التوافيق التي تضم r عنصراً من مجموعة مكونة من n عنصراً، حيث $0 \leq r \leq n$. فمن المثال السابق $\binom{3}{2} = 3$.

$C_n^r = \binom{n}{r}$ وفي حاشية الصفحة يذكر الكتاب الترميز القديم C_n^r ، ويقول إنّه سيلتزم بالشائع حالياً. انتبه إلى انقلاب الموضعين: في القديم n تحت و r فوق، وفي الجديد n فوق و r تحت. العدد واحد.

الكتاب، الصفحة 136

انتبه: ومفاجأة صغيرة في الصفحة نفسها: المثال يكتب $(p = 2)$ بينما التعريف والترميز فوقه وتحتّه يكتبان r . لا تبحث عن معنى جديد لـ p ، فهو r نفسه، أي عدد عناصر المجموعة الجزئية. اختلافاً في الطباعة لا في الرياضيات، ونحن نكتب r في كلّ مكان.

كم توفيقاً يضمّ ثلاثة عناصر من $E = \{a, b, c\}$ ؟

| كيف أبدأ؟ لا تحسب بعد، بل اكتب المجموعات الجزئية التي فيها ثلاثة عناصر من مجموعةٍ فيها ثلاثة عناصر. كم واحدةً تجد؟

(أ) ستة

(ب) واحد، وهو E نفسها

(ج) ثلاثة

ب. نعم. المجموعة الجزئية الوحيدة التي تضمّ العناصر الثلاثة كلّها هي E . وهذا هو $\binom{3}{3} = 1$ ، وسترى القاعدة العامّة $\binom{n}{n} = 1$ في الفقرة التالية.

عدد التوافيق

الآن نعدّ. والفكرة التي يبني عليها الكتاب تستحقّ أن تُقرأ ببطء، لأنّها تُقال عنده في ثمانية أسطرٍ بلا صورةٍ ولا جدول: كلّ ترتيبٍ طوله r هو تبديلٌ على مجموعةٍ جزئيةٍ واحدةٍ لا غير. أي إنّ التراتيب تنقسم إلى حزمٍ، حزمةٌ لكلّ مجموعةٍ جزئيةٍ، وكلّ حزمةٍ فيها $r!$ ترتيباً.

c	d	e
(c, d, e)	(d, c, e)	(e, c, d)
(c, e, d)	(d, e, c)	(e, d, c)

حزمةٌ واحدة: التراتيب الستة التي تخرج كلّها من المجموعة الجزئية نفسها، تلك المكوّنة من c و d و e ، مرتّبةً بحسب بندها الأول. ثلاثة اختياراتٍ للبند الأول واثنان لكلّ منها، فستّة. والكتاب لا يرسم هذا، وهو بالضبط الموضع الذي يحتاجه القارئ.

مثال الكتاب صفحة 136. لتكن $E = \{a, b, c, d, e\}$ و $r = 3$. احسب $\binom{5}{3}$ ، أي عدد المجموعات الجزئية التي في كلّ منها ثلاثة عناصر.

$$n = 5, \quad r = 3$$

1. ① سمّ المجهول قبل أن تحسبه صَع $q = \binom{5}{3}$ وسمّ المجموعات الجزئية المطلوبة E_1 و E_2 حتى E_q . لا نعرف q بعد، ولا نحتاج إلى معرفته لنبني عليه.

$$q = \binom{5}{3}$$

2. ② الملاحظة التي يقوم عليها كلّ شيء خذ ترتيباً أيّاً كان، مثلاً (e, d, c) . عناصره هي $\{c, d, e\}$ ولا شيء غيرها، فهو تبديلٌ على تلك المجموعة وعلى واحدةٍ فقط. فكلّ ترتيبٍ ينتمي إلى حزمةٍ واحدة، ولا ترتيبٍ بلا حزمة.

$$(e, d, c) \longrightarrow \{c, d, e\}$$

3. ③ عُدَّ الحزمة الواحدة كم ترتيباً في الحزمة الواحدة؟ بقدر تبادل ثلاثة عناصر، أي $3!$ ، وهي السَّنة المكتوبة في الجدول أعلاه.

$$3! = 6$$

4. ④ عُدَّ الكلّ مرتين، بطريقتين عدد الترتيب الثلاثي من E هو $P_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ من الدرس السابق. وهو نفسه q حزمة في $3!$ ترتيباً. الشيء نفسه معدوداً بطريقتين، فالتجان متساويان.

$$3! \times q = P_5^3$$

5. ⑤ اقسم من المساواة يخرج q بالقسمة، لا بالضرب. والقسمة هي التي تصغر العدد، وهذا هو المطلوب: التوافق أقل من الترتيب دائماً عندما $r \geq 2$.

$$q = \frac{60}{6} = 10$$

والحيلة كلها اسمها العدّ المزدوج: تعدّ الشيء نفسه بطريقتين وتساوي بين الناتجين. لم يُضف الكتاب معلومة جديدة في هذه الفقرة، بل نظر إلى المعلومة القديمة من جهة أخرى.

$$\binom{5}{3} = \frac{P_5^3}{3!} = 10$$

والحالة العامة هي الخطوات نفسها بالحروف، ويسمّيها الكتاب في هامش جانبي «الحالة العامة» بلا رقم. لتبني ترتيباً طوله r من E : اختر أولاً مجموعة جزئية E' فيها r عنصراً، ولذلك $\binom{n}{r}$ إمكاناً؛ ثم رتب عناصر E' ، ولذلك $r!$ إمكاناً. وبالمبدأ الأساسي في العدّ يكون الجداء هو عدد الترتيب.

مبرهنة 1

هذه هي الخطوة التي يثبتها النصّ الجاري قبل الكتلة، والكتاب يختتمها بعبارة «وهكذا نكون قد أثبتنا المبرهنة الآتية». ومنها بالقسمة على $r!$ تخرج الصيغة.

$$\binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!} \quad \text{بشرط } n \geq r \geq 0 . \text{ والكتاب يكتب السلسلة بثلاثة أعضاء، وبينهما عضو ثالث هو}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

، وهو البسط نفسه مكتوباً بعوامله. وهنا شيء يستحقّ الانتباه: الكتاب يكتب الشرط نفسه بصورتين على صحتين متتاليتين، $0 \leq r \leq n$ في التعريف صفحة 136 و $n \geq r \geq 0$ في المبرهنة صفحة 137. الصورتان تقولان الشيء نفسه، والاختلاف في الكتابة لا في المعنى.

الكتاب، الصفحة 137

انتبه: وأشهر خطأ في هذه الصيغة هو قلب اتجاه العملية: أن تُكتب $\binom{n}{r} = P_n^r \times r!$ بالضرب بدل القسمة. والاختبار الذي يكشفه في ثانية لا يحتاج إلى حفظ: عندما $r \geq 2$ تكون التوافيق أقل من الترتيب، لأن $r!$ ترتيباً تنهار إلى توفيق واحد. فالعملية التي تصغر هي الصحيحة، أي القسمة. (وعند $r = 0$ أو $r = 1$ يتساوى العدان، لأن $r! = 1$ والقسمة عليه لا تغير شيئاً). جرّبها بالأرقام: $P_5^3 = 60$ و $\binom{5}{3} = 10$.

تكريساً للفهم

$\binom{n}{0} = 1$ كم مجموعة جزئية فيها صفر عنصر؟ واحدة فقط، هي المجموعة الخالية. ليست صفراً: الخالية موجودة، وهي مجموعة جزئية من كل مجموعة.

$\binom{n}{1} = n$ وكم مجموعة جزئية فيها عنصر واحد؟ بقدر عناصر E . في $E = \{u, v, w, x\}$ هي $\{u\}$ و $\{v\}$ و $\{w\}$ و $\{x\}$ ، أربع مجموعات لأربعة عناصر.

$\binom{n}{n} = 1$ وكم مجموعة جزئية فيها n عنصراً؟ واحدة، هي E بكاملها. والكتاب يجيب عن السؤال الأول قبل ذلك: $\binom{n}{r}$ هو عدد الخيارات المختلفة لـ r عنصراً مختلفاً من مجموعة فيها n عنصراً.

الكتاب، الصفحة 137

انتبه: والثلاثة السابقة تُحفظ بالمعنى لا بالصورة، لأنّ الخطأ فيها يأتي من النظر إلى الكسر بدل النظر إلى المجموعات. من رأى $\binom{n}{1}$ وقال «الواحد في الأسفل فالجواب واحد» قرأ الرمز ولم يقرأ السؤال. اسأل دائماً: كم مجموعة جزئية بهذا الحجم؟ فيخرج الجواب بلا صيغة.

من مجموعة فيها 6 عناصر، أيهما أكبر: عدد التوافيق الثلاثية أم عدد الترتيب الثلاثية؟

كيف أبداً؟ لا تحسب إن لم تُرد. العلاقة $P_n^r = \binom{n}{r} \times r!$ تجيب وحدها، ما دام $r! \geq 1$.

(أ) الترتيب أكبر، والنسبة $3! = 6$

(ب) التوافيق أكبر، لأنّ المجموعات أعظم من القوائم

(ج) متساويان، فكلاهما يختار 3 من 6

أ. نعم. $P_6^3 = 120$ و $\binom{6}{3} = 20$ ، والنسبة 6 بالضبط. كل توفيق يتفرع إلى $3!$ ترتيباً.

مثال الكتاب صفحة 137 وحلّه صفحة 138. مجموعة فيها 32 بطاقة: ثماني بطاقات حمراء مرقمة من 1 إلى 8، وثمانى زرقاء، وثمانى خضراء، وثمانى صفراء، كل منها مرقمة كذلك. ونسمي سحباً أي مجموعة جزئية مكونة من خمس بطاقات. كم سحباً يضمّ تماماً بطاقتين حمراوين؟

$$n = 32, \quad r = 5$$

1. ① اقرأ كلمة «تماماً» قبل كل شيء «تماماً بطاقتان حمراوان» شرطان لا شرط واحد: اثنتان حمراوان، والثلاث الباقيات ليست حمراء. من أهمل الشرط الثاني عدّ السحوبات التي فيها ثلاث حمراوات وأكثر.

$$2 + 3 = 5$$

2. ② اختر الحمراوين الحمراء ثماني بطاقات، ونختار منها اثنتين، والترتيب بينهما لا يهم لأنّ السحب مجموعة. إذن توفيق.

$$\binom{8}{2} = 28$$

3. ③ ثمّ الثلاث الباقيات، ومن أين لا من الثلاثين الباقية، بل من غير الحمراء وحدها. البطاقات غير الحمراء هي $32 - 8 = 24$ ، ومنها نختار ثلاثاً.

$$\binom{24}{3} = 2024$$

4. ④ اضرب، لأنّهما اختياران متتاليان مع كل اختيارٍ للحمراوين تأتي كلّ اختيارات الثلاث الباقيات، فهذا المبدأ الأساسي في العدّ نفسه.

$$28 \times 2024 = 56672$$

وكلمة «تماماً» هي التي فرضت الرقم 24 . لو قال السؤال «على الأقلّ بطاقتان حمراوان» لتغيّر الحساب كلّهُ. اقرأ الكلمة الصغيرة في نصّ المسألة قبل أن تكتب رمزاً واحداً.

$$\binom{8}{2} \times \binom{24}{3} = 56672$$

والسؤال الثاني من المثال نفسه، صفحة 137: كم سحبا يضمّ على الأقلّ بطاقةً واحدةً تحمل الرقم 1 ؟ وهنا يغيّر الكتاب الطريق، ولسببٍ وجيه.

$$\text{card}(E) = \binom{32}{5}$$

1. ① لماذا لا نحسبها مباشرةً «على الأقلّ واحدة» يعني واحدةً أو اثنتين أو ثلاثاً أو أربعاً. أربع حالات تُجمع، ومن حسبها بضربةٍ واحدة عدّ السحوبات ذات الرقمين مرتّين.

$$1, 2, 3, 4$$

2. ② اقلب السؤال سمّ $\mathcal{A}$ مجموعة السحوبات التي فيها الرقم 1 على الأقلّ مرّة. متممها $\mathcal{A}^c$ هي السحوبات التي ليس فيها الرقم 1 أبداً، وهذه حالة واحدة لا أربع.

$$\text{card}(\mathcal{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(\mathcal{A}^c)$$

3. ③ كم بطاقةً تحمل الرقم 1، والكتاب لا يقولها أربعة ألوان، وفي كل لون بطاقة واحدة رقمها 1 ، فهي أربع بطاقات. هذا الرقم لا يُذكر في الحل صراحةً، وعليك أن تقرأه من نص المسألة. تبقى $32 - 4 = 28$ بطاقة.

$$32 - 4 = 28$$

4. ④ اطح السحوبات كلها $\binom{32}{5}$ ، والسحوبات الخالية من الرقم 1 هي $\binom{28}{5}$. والفرق هو المطلوب. وانتبه إلى الاتجاه: الكل ناقص المتقدمة، لا العكس.

$$\binom{32}{5} - \binom{28}{5} = 201376 - 98280 = 103096$$

وهذه عادةً تنفك في الاحتمالات كلها: كلما رأيت «على الأقل»، انظر في المتقدمة أولاً. «على الأقل واحدة» تنقلب إلى «ولا واحدة»، وهي حالة واحدة بسيطة بدل جمع حالات.

$$\text{card}(\mathcal{A}^c) = \binom{28}{5}$$

نريد لجنة من أربعة أشخاص من مجموعة فيها خمسة عشر رجلاً وأربع عشرة امرأة. كم لجنة مختلفة يمكن تأليفها؟
كيف أبدأ؟ أسأل أولاً: هل تختلف اللجنة إذا ربّنا أعضائها بترتيب آخر؟ الجواب يحدّد الصيغة، والعدد الكلي للأشخاص يحدّد n .

$$P_{29}^4 = 570024 \quad (\text{أ})$$

$$\binom{15}{4} + \binom{14}{4} \quad (\text{ب})$$

$$\binom{29}{4} = 23751 \quad (\text{ج})$$

ج. نعم. الأشخاص $29 = 14 + 15$ ، واللجنة مجموعة لا قائمة، فالترتيب لا يهم. ولا شرط على تركيبها، فلا فصل بين الرجال والنساء.

انتبه: وتنبيه آخر على تمرين في الكتاب لا يُحلّ بهذا الدرس وحده: يطلب التمرين ③ ③ صفحة 138 حلّ $\binom{10}{3n} = \binom{10}{n+2}$.
 بمعرفة هذا الدرس تجد الفرع $3n = n + 2$ أي $n = 1$ ، وتقف. والفرع الثاني $3n = 10 - (n + 2)$ أي $3n = 10 - (n + 2)$ أي $n = 2$ يحتاج المبرهنة $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ ، وهي مبرهنة 2 في الدرس التالي صفحة 139. فإن وجدت جواباً واحداً فلسّ مخطئاً، بل لم تصل الأداة بعد.

احسب $\frac{\binom{8}{3}}{\binom{9}{3}}$ واكتبه كسراً غير قابل للاختزال.

كيف أبدأ؟ احسب كل توفيق على حدة بالصيغة $\frac{n!}{(n-r)!r!}$ ، ثم اختزل. أو لاحظ أنّ المقامين $3!$ واحد، فيسقط.

(أ) $\frac{8}{9}$

(ب) $\frac{3}{2}$

(ج) $\frac{2}{3}$

ج. نعم. $\binom{8}{3} = 56$ و $\binom{9}{3} = 84$ ، والنسبة $\frac{56}{84} = \frac{2}{3}$. وأسرع: المقام $3!$ واحد في الاثنين، فتبقى $\frac{8 \times 7 \times 6}{9 \times 8 \times 7} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. ولا تقف عند $\frac{6}{9}$ ، فالسؤال يطلب كسراً غير قابل للاختزال.

المصدر: الرياضيات، الجزء الثاني، الصفحات 136 إلى 138 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.