



الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

خواص عدد التوافيق، ومنشور ذي الحدين

الأعداد التي تعدّ المجموعات الجزئية هي نفسها معاملات القوة
التحليل التوافقي . الوحدة 6 . الدرس 3

في الدرس السابق عرفت ما هو $\binom{n}{r}$ وكيف يُحسب. وهذا الدرس لا يضيف رمزاً جديداً، بل يسأل عن هذا العدد نفسه: ماذا يفعل؟ وله جوابان. الأول خاصتان تُقَصّران الحساب: إحداهما تقول إنّ اختيار ما تأخذه هو بعينه اختيار ما تتركه، والأخرى تبني كل سطرٍ من السطر الذي قبله، وعليها يقوم مثلث الكرجي-باسكال. والجواب الثاني أوسع من ذلك: هذه الأعداد هي بعينها معاملات $(a+b)^n$. فالمطابقتان $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ و $(a+b)^3$ اللتان تحفظهما منذ سنين ليستا حالتين خاصتين محفوظتين، بل سطران من جدول واحد، وهذا الدرس يكتب الجدول كله.

خواص عدد التوافيق

يبدأ الدرس في الكتاب بلا مقدّمة: بعد سطر العنوان مباشرة تأتي مبرهنة 2 بخاصتين. ولاحظ الرقم، فهو ليس خطأً مطبعياً: عدّاد المبرهنات يمشي عبر الوحدة كلّها، ومبرهنة 1 في الدرس السابق صفحة 137. وهذا الدرس وحده بين دروس الوحدة لا يحمل عناوين فرعية مرقّمة.

مبرهنة 2

$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ أيّا كان العددين الطبيعيّان n و r بحيث $0 \leq r \leq n$. وتُسمّى خاصّة التناظر: عدد المجموعات الجزئية التي فيها r عنصراً يساوي عدد تلك التي فيها $n-r$ عنصراً.

$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$ أيّا كان العددين الطبيعيّان n و r بحيث $1 \leq r < n$. وتُسمّى علاقة باسكال. وانتبه إلى الشرط، فهو ليس شرط الخاصّة الأولى: هنا $r < n$ بالأصغر تماماً، وهناك $r \leq n$.

الكتاب، الصفحة 139

انتبه: والشرطان يُخلطان كثيراً، فاحفظ الفرق بمثالٍ لا بقاعدة. خاصّة التناظر تعمل عند $r=0$: $\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1$ ، وهذا صحيح. أمّا علاقة باسكال فلا تعمل هناك، لأنّها تطلب $\binom{n-1}{r-1}$ ، أي $\binom{4}{-1}$ عند $r=0$ ، وهذا رمزٌ لا معنى له في هذه المرحلة. وكذلك عند $r=n$. فالخاصّة الأولى أوسع نطاقاً من الثانية، وليستا شيئاً واحداً بصيغتين.

ويبرهن الكتاب الخاصّتين بالحساب أولاً، صفحة 139، ثم يعود صفحة 141 ليسأل: كيف نثبتهما دون حساب؟ وسنقلب الترتيب هنا، فنبدأ بالبرهان الذي لا يحسب. والسبب أنّ البرهان الحسابي يقنعك بأنّ المساواة صحيحة، أمّا الآخر فيريك لماذا لا يمكن أن تكون غير صحيحة، وهذا الثاني هو ما يبقى معك في القاعة.

البرهان دون حساب، من جواب الكتاب عن السؤال الأول تحت عنوان تكريساً للفهم صفحة 141. لتكن E مجموعةً فيها n عنصراً. نبرهن الخاصتين بالعدّ وحده.

$$\text{card}(E) = n$$

1. ① التناظر: ما تأخذه يحدّد ما تتركه اختر جزءاً F من E فيه r عنصراً. لحظةً اخترته، صار جزءه المتّمم $F' = E \setminus F$ معيّناً، وفيه $n - r$ عنصراً. والعكس كذلك: من F' يعود F .

$$F \mapsto F' = E \setminus F$$

2. ② فالعدّتان عدّة واحدة هذا التقابل يرافق كلّ جزءٍ ذي r عنصراً بجزءٍ واحدٍ ذي $n - r$ عنصراً، ولا يُفقد شيء ولا يتكرّر شيء. وحين يتقابل شيّتان واحداً بواحد فعددهما واحد.

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

3. ③ علاقة باسكال: ثبتّ عنصراً واحداً خذ عنصراً a من E وثبّته. الأجزاء التي فيها r عنصراً تنقسم إلى نوعين لا ثالث لهما: تلك التي تحوي a ، وليكن عددها x ، وتلك التي لا تحويه، وليكن عددها y .

$$x + y = \binom{n}{r}$$

4. ④ عدّ النوع الأول الجزء الذي يحوي a قد أسّطهك فيه مكانٌ واحد. فالباقى $r - 1$ عنصراً تُختار من $E \setminus \{a\}$ ، وعدد عناصرها $n - 1$.

$$x = \binom{n-1}{r-1}$$

5. ⑤ عدّ النوع الثاني والجزء الذي لا يحوي a هو جزءٌ فيه r عنصراً مأخوذةً كلّها من $E \setminus \{a\}$. فالمسألة نفسها بمجموعةٍ أصغر بعنصر.

$$y = \binom{n-1}{r}$$

6. ⑥ اجمع النوعين ومن $x + y = \binom{n}{r}$ تخرج العلاقة. ولاحظ من أين جاء الشرط $1 \leq r < n$: إن كان $r = 0$ فلا يوجد جزءٌ يحوي a أصلاً، وإن كان $r = n$ فلا يوجد جزءٌ لا يحويه. الشرط ليس زينةً على الصيغة، بل هو ما يجعل النوعين موجودين.

$$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$$

وهذه إحدى طريقتي العدّ في هذه الوحدة، وهي طريقة التقسيم: لا تحسب العدد، بل قسم ما تعدّه إلى أنواعٍ لا يتداخل بعضها ببعض، ثمّ عدّ كلّ نوعٍ على حدة. والطريقة الأخرى هي المبدأ الأساسي في العدّ، وستراها في آخر الدرس تبرهن النتيجة نفسها بالجداء لا بالجمع. وشرط نجاح التقسيم أن يكون كلّ شيءٍ في نوعٍ واحدٍ لا في نوعين، وهذا بعينه ما تحدّر منه الوحدة في خطتها الوحيد المسجّل.

$$x + y = \binom{n}{r}$$

والآن البرهان الحسابي كما هو في الكتاب صفحة 139، وهو المطلوب في الامتحان. ينطلق من صيغة مبرهنة 1 صفحة 137 ومن تعريف العاملي، ولا شيء غيرهما. نبرهن علاقة باسكال، فهي الأطول.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

1. ① اكتب الحدين بالصيغة صَع كلّ حدّ في صورة عواملٍ صرفة. لاحظ المقامين: في الأوّل $(r-1)!$ و $(n-r)!$ ، وفي الثاني $r!$ و $(n-1-r)!$. المقامان مختلفان، فلا جمع بعد.

$$\begin{aligned} & \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \\ &= \frac{(n-1)!}{(r-1)! \cdot (n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r! \cdot (n-1-r)!} \end{aligned}$$

2. ② وُحّد المقام بعاملٍ مصطنع اضرب الكسر الأوّل بـ r بسطاً ومقاماً، فيصير $r! = r \cdot (r-1)!$. واضرب الثاني بـ $n-r$ ، فيصير $(n-r)! = (n-r) \cdot (n-1-r)!$. والكتاب يطبع هذين العاملين بالأحمر، لأنّهما هما الحيلة كلّها.

$$= \frac{r \times (n-1)!}{r \cdot (r-1)! \cdot (n-r)!} + \frac{(n-r) \times (n-1)!}{r! \cdot (n-r) \cdot (n-1-r)!}$$

3. ③ فالمقام واحد بعد الضرب صار المقامان $r! \cdot (n-r)!$ كلاهما. والبسطان يحملان $(n-1)!$ عاملاً مشتركاً.

$$= \frac{r \times (n-1)!}{r! \cdot (n-r)!} + \frac{(n-r) \times (n-1)!}{r! \cdot (n-r)!}$$

4. ④ اجمع البسطين و $n = (n-r) + r$ ، وهذا هو الموضع الذي يُغلق فيه البرهان: العاملان المصطنعان يجمعان إلى n بالضبط، لا إلى شيءٍ آخر.

$$= \frac{(r+n-r) \times (n-1)!}{r! \cdot (n-r)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{r! \cdot (n-r)!}$$

5. ⑤ و $n \cdot (n-1)! = n!$ فالبسط صار $n!$ والمقام $r! \cdot (n-r)!$ ، وهذه هي صيغة مبرهنة 1 بعينها. وبهذا يكتمل الإثبات، بعبارة الكتاب.

$$= \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} = \binom{n}{r}$$

وبرهان التناظر أقصر من ذلك بكثير، سطرٌ واحد: ضَع $n-r$ مكان r في الصيغة، فيصير المقام $(n-(n-r))! \cdot (n-r)!$ أي $r! \cdot (n-r)!$ ، وهو المقام نفسه. والضرب في المقام تبادليّ، فلا فرق.

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-(n-r))! \cdot (n-r)!} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} = \binom{n}{r}$$

وعلاقة باسكال ليست للبرهان فحسب، بل هي آلة حساب: إن عرفت سطرًا كاملاً من الأعداد، بنيك السطر الذي بعده بالجمع وحده، بلا عوامل ولا قسمة. وهذا هو مثلث الكرجي-باسكال، ويسمّيه الكتاب في صفحة 141 «الشكل المجاور».

n	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

مثلث الكرجي-باسكال كما في الكتاب صفحة 141. العمود الأول هو السطر n ، والعناوين فوقه هي الرتبة r ، وكلاهما يبدأ من الصفر لا من الواحد. كلّ عددٍ داخل المثلث هو مجموع العددين فوقه، وهذا هو نصّ علاقة باسكال: الثلاثة والثلاثة في السطر المكتوب أمامه 3 تجمعان إلى الستة في السطر المكتوب أمامه 4. والخلايا الفارغة فوق القطر تبقى فارغة لأنّ r لا يكون أكبر من n . وفي الكتاب سهمان يشيران إلى هذا الجمع، ودائرة حول العشرة في السطر المكتوب أمامه 5 والعمود المكتوب فوقه 3.

تذكّر: واقرأ المثلث كما يُقرأ جدولٌ لا كما يُقرأ نصّ: العدد $\binom{n}{r}$ يقع عند تقاطع السطر n والعمود r . ف $\binom{5}{3} = 10$ في السطر المكتوب أمامه 5 والعمود المكتوب فوقه 3. وهذا هو موضع الغلط الأشهر: السطر الأول المطبوع ليس $n = 1$ بل $n = 0$ ، وأول عمود مطبوعٍ للأعداد ليس $r = 1$ بل $r = 0$. من عدّ بالواحد أخطأ في كلّ قراءة بعدها، ولم يخطئ في الحساب مرّةً واحدة. ولهذا نقول في هذا الدرس «السطر $n = 5$ » ولا نقول «السطر الخامس»: الأولى لا تلتبس، والثانية تلتبس.

استعمل خاصّة التناظر وحدها: ما قيمة $\binom{29}{27}$ ؟

كيف أبدأ؟ لا تحسب $29!$ ، فهو عددٌ من واحدٍ وثلاثين خانة. بدّل الرتبة بمتّمتها أوّلاً، ثمّ احسب.

أ) 27

ب) 406

ج) 812

ب. نعم. $29 - 27 = 2$ ، ف $\binom{29}{27} = \binom{29}{2} = \frac{29 \times 28}{2} = 406$. وهذا هو نفع الخاصّة: أن تحوّل رتبةً كبيرةً إلى رتبةٍ صغيرة قبل أن تلمس القلم.

في مثلث الكرجي-باسكال، ما العددا اللذان يجمعان إلى $\binom{6}{2} = 15$ ؟

كيف أبدأ؟ علاقة باسكال تنزل سطرًا واحدًا. فالعددا المطلوبان في السطر $n = 5$ ، وفي رتبتين متجاورتين.

أ) $\binom{5}{2} = 10$ و $\binom{5}{1} = 5$

ب) $\binom{6}{1} = 6$ و $\binom{6}{1} = 6$

ج) $\binom{5}{2} = 10$ و $\binom{5}{3} = 10$

أ. نعم، و $5 + 10 = 15$. بالصيغة: $\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$ عند $n = 6$ و $r = 2$ يعطي $\binom{5}{1} + \binom{5}{2}$. والشرط $1 \leq 2 < 6$ محقق.

منشور ذي الحدين

تعرف $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ، وتعرف $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. انظر الآن إلى معاملتهما: $1, 2, 1$ ثم $1, 3, 3, 1$. وهذان بعينهما سطرا $n = 2$ و $n = 3$ من المثلث الذي كتبناه قبل قليل. فالمتطابقتان لم تكونا محفوظتين بلا سبب، بل هما حالتان من قاعدةٍ واحدة، وهذه القاعدة هي مبرهنة 3.

مبرهنة 3 (منشور ذي الحدين)

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b$$

أيّا كان العددا العقدان a و b ، وأيّا كان العدد الطبيعي $n \geq 1$. ولاحظ

$$+ \dots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \dots$$

$$+ \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

كلمة عقديّان: المبرهنة لا تقتصر على الأعداد الحقيقية، ولهذا يستعملها الكتاب بعد قليل على $(1 + i)^6$ مباشرةً.

الكتاب، الصفحة 139

تذكّر: واقراً الصيغة بقانونٍ واحدٍ يُغنيك عن حفظها: أُس a ينزل من n إلى الصفر، وأُس b يطلع من الصفر إلى n ، ومجموع الأسين في كل حدٍّ يساوي n . فإن كتبتَ حدًّا مجموع أُسّيه ليس n فقد أخطأتَ قبل أن تحسب المعامل. وهذه هي الملاحظة التي يختم بها الكتاب آخر نقاط كتلة أفكار يجب تمثيلها صفحة 143.

ويبرهن الكتاب المبرهنة بالتدريج، ويكتب على البرهان «يترك إلى قراءة ثانية»، أي إنه اختياري. والفكرة في سطرين: يُكتب $(a+b)^{n+1} = a(a+b)^n + (a+b)^n b$ ، فينتج مجموعان أحدهما منزلقٌ عن الآخر بموضعٍ واحد، ثم تُجمع الحدود المتناظرة بعلاقة باسكال. والعلاقة تُستعمل هنا في صورتها $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$ حيث $1 \leq r \leq n$ ، وهي مبرهنة 2 نفسها بعد وضع $n+1$ مكان n . لا تحفظ سطور البرهان، فالمطلوب في الامتحان هو الصيغة والاستعمال. من تعلّق بكل سطرٍ من الانزلاق خسر الأمثلة.

وقبل الأمثلة أداة لا يفرد لها الكتاب كتلة، ولا كتلة أصلاً في هذا الدرس: صفحاته الأربع لا تحمل تعريفاً ولا خاصّةً ولا قاعدةً ولا ملاحظة، بل مبرهنتين ونتيجة لا غير. والأداة مذكورة عنده جواباً عن السؤال الثالث تحت عنوان تكريساً للفهم صفحة 141، سطرًا واحدًا بلا برهانٍ وبلا مثال، ثم تطلبها تمارين الصفحة 142 فوراً. وهي هنا في موضعٍ ظاهرٍ قبل الأمثلة، لأنّ ترتيب الكتاب في هذه النقطة يترك القارئ بلا عُدة.

$$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r, \quad 0 \leq r \leq n$$

تذكّر: هذا هو الحدّ الذي دليله r في منشور $(a+b)^n$ ، وبه يُحلّ كلّ سؤالٍ من نوع «عَيّن الحدّ الذي يحوي كذا» بلا نشر المنشور كلّ. والمنشور مجموع T_0 و T_1 حتّى T_n ، فعدد الحدود $n+1$ لا n ، لأنّ الدليل يمشي من الصفر إلى n . في $(a+b)^6$ سبعة حدود، وهذا ما ترى في مثال الكتاب صفحة 142.

انتبه: وهنا تناقضٌ في الكتاب نفسه، لا في قراءتك: صفحة 139 وصفحة 141 تكتبان الحدّ $\binom{n}{r} a^{n-r} b^r$ ، وصفحة 143 تكتبه $\binom{n}{r} a^r b^{n-r}$. والصيغتان صحيحتان كلتاهما بفضل التناظر، لكنّهما تعطيان الدليل r نفسه حدّين مختلفين: في الأولى T_1 من $(x+2)^5$ هو $5x^4 \cdot 2$ ، وفي الثانية هو $5x \cdot 2^4$. فاختر صيغةً واحدةً وألزم نفسك بها. نحن نلتزم صيغة الصفحة 139، لأنّ تمارين الصفحة 142 معلقةٌ بها، ولأنّها هي التي تكتب المبرهنة.

مثال الكتاب صفحة 142، عنوانه «استعمال منشور ذي الحدين». انشر $A = (2x-1)^5$. والصعوبة ليست في المعاملات بل في أنّ الحدّين ليسا x و 1.

$$A = (2x-1)^5$$

1. ① سمِّ a و b قبل كلِّ شيء المقدار $2x - 1$ طرْح، والمبرهنة تتكلَّم عن جمع. فاقْرأ الطرح جمعاً: $a = 2x$ و $b = -1$. وهذه الخطوة وحدها هي التي تُخطئ فيها أكثر الأوراق.

$$a = 2x, \quad b = -1, \quad n = 5$$

2. ② ما تفعله قوى -1 قوى b الزوجية تساوي 1 والفردية تساوي -1 . فالإشارات تتعاقب: زائد، ناقص، زائد، ناقص. ومن وضع $b = 1$ خرجت عنده كلُّ الحدود بالزائد، وكلُّ سطر بعدها خطأ.

$$b^0 = 1, \quad b^1 = -1, \quad b^2 = 1, \quad b^3 = -1, \quad b^4 = 1, \quad b^5 = -1$$

3. ③ ولا تنس الاثنين من $a = 2x$ في الحد الثاني $a^4 = (2x)^4 = 2^4 x^4 = 16x^4$ ، فالمعامل $\binom{5}{1} \times 16 = 80$ لا 5. كلُّ حدٍّ يحمل قوَّة من الاثنين، والمعاملات وحدها لا تكفي.

$$(2x - 1)^5 = 2^5 x^5 - \binom{5}{1} 2^4 x^4 + \binom{5}{2} 2^3 x^3 - \binom{5}{3} 2^2 x^2 + \binom{5}{4} 2x - 1$$

4. ④ اضرب واجمع معاملات السطر $n = 5$ هي 1, 5, 10, 10, 5, 1 من المثلث. فالحدود: $32x^5$ ، ثم $80 = 5 \times 16$ ، ثم $80 = 10 \times 8$ ، ثم $40 = 10 \times 4$ ، ثم $10 = 5 \times 2$ ، ثم 1.

$$= 32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1$$

وانظر إلى الحدَّ الأوَّل والأخير: الكتاب يكتبهما بلا معامل، $2^5 x^5$ و -1 ، لأنَّ $\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1$. فلا تبحث عن معاملٍ ضائع، بل اعلم أنَّ العدد الآتي من المثلث في طرفي كلِّ منشورٍ يساوي 1 دائماً. أمَّا معامل الحدِّ كلِّه فقد لا يكون 1، كما في $32x^5$ هنا.

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

والمثال نفسه في الكتاب يطلب $B = (1 + i)^6$ ، ويذكر بأنَّ i هو العدد العقدي الذي يحقِّق $i^2 = -1$. وهذا هو موضع كلمة «عقدَيان» في المبرهنة: لا حاجة إلى قاعدةٍ جديدة.

$$B = (1 + i)^6$$

1. ① معاملات السطر $n = 6$ هنا $a = 1$ و $b = i$ ، وقوى الواحد كلِّها واحد، فلا يبقى إلا المعاملات وقوى i . ومعاملات $n = 6$ هي 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1، سبعة حدود لا سِتَّة.

$$(1 + i)^6 = 1 + 6i + 15i^2 + 20i^3 + 15i^4 + 6i^5 + i^6$$

2. ② أرجع كلَّ قوَّةٍ من i إلى أصلها القوى تدور بدورةٍ طولها أربعة. اكتبها كلها قبل الجمع، فالجمع بعد ذلك حسابٌ عادي.

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad i^6 = -1$$

3. ③ عوّض واجمع الجزئين الحقيقي: $1 - 15 + 15 - 1 = 0$. والتخيلي: $6 - 20 + 6 = -8$. فالجزء الحقيقي يزول كله.

$$= 1 + 6i - 15 - 20i + 15 + 6i - 1$$

4. ④ الناتج عددٌ تخيليٌّ صرف. ومن ترك قوى i كما هي بقي عنده مجموعٌ لا يجتمع، وظنَّ أنه أخطأ في المعاملات.

$$(1 + i)^6 = -8i$$

وفي هذا الناتج فائدةٌ تعرفها من الوحدة الرابعة: $(1 + i)^2 = 2i$ ، ف $(1 + i)^6 = (2i)^3 = 8i^3 = -8i$. طريقان إلى الجواب نفسه، وتوافقهما تحققٌ مجّاني.

$$(1 + i)^6 = ((1 + i)^2)^3 = (2i)^3 = -8i$$

وهذا النوع من الأسئلة يطلبه الكتاب في تَدْرَب ② صفحة 142 ولم يُره في مثالٍ قبله. في منشور $(x + \frac{1}{x})^{10}$ ، عيّن الحدّ الذي يحوي x^2 والحدّ الثابت المستقلّ عن x . ولا تنشر المنشور، فأحد عشر حدّاً عملٌ طويلٌ بلا داعٍ.

$$(x + \frac{1}{x})^{10}$$

1. ① اكتب T_r ولا تحسب شيئاً بعد هنا $a = x$ و $b = \frac{1}{x} = x^{-1}$ و $n = 10$. صُغها في صيغة الحدّ ذي الدليل r كما هي.

$$T_r = \binom{10}{r} x^{10-r} (x^{-1})^r$$

2. ② اجمع الأثنين في أسّ واحد وهذه هي الخطوة التي تحلّ المسألة كلها: $x^{10-2r} \cdot x^{-r} = x^{10-2r}$. انتبه إلى الاثنين في $10 - 2r$ ، فليس الأسّ $10 - r$. ومن كتب $10 - r$ حصل على جوابٍ مرتّبٍ وخاطئ.

$$T_r = \binom{10}{r} x^{10-2r}$$

3. ③ الحدّ الذي يحوي x^2 حُلّ $10 - 2r = 2$ ، ف $r = 4$. والشرط $0 \leq 4 \leq 10$ محقّق، فالحدّ موجود.

$$T_4 = \binom{10}{4} x^2 = 210x^2$$

4. **الحدّ الثابت** الثابت معناه x^0 ، أي $10 - 2r = 0$ ومنه $r = 5$. ولا تنس أن الأس صفر لا أن الحد صفر.

$$T_5 = \binom{10}{5} x^0 = 252$$

5. **ومتى لا يوجد حدّ ثابت أصلاً** هذا سؤال تَدْرَب ③: في منشور $(x^2 + \frac{1}{x})^n$ يكون الأس $2(n - r) - r = 2n - 3r$. فالحدّ الثابت يوجد إذا كان $2n = 3r$ لعددٍ طبعيٍّ r ، وهذا يقع إذا وفقط إذا كان n من مضاعفات الثلاثة، وحينئذٍ $r = \frac{2n}{3}$. فلا حدّ ثابت في $n = 4$ ، وفي $n = 6$ هو $T_4 = \binom{6}{4} = 15$.

$$2n - 3r = 0 \iff r = \frac{2n}{3}, \quad 3 \mid n$$

والطريق واحد في كلّ أسئلة هذا النوع: اكتب T_r ، اجمع أسس المجهول في أس واحد، ثمّ حلّ معادلةً من الدرجة الأولى في r . ولا تنس التحقق من أن r الناتج عددٌ طبعيٌّ بين الصفر و n ، فإن لم يكن فالحدّ المطلوب غير موجود، وهذا جوابٌ صحيحٌ أيضاً.

$$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

والمثال الثاني في الكتاب صفحة 142، عنوانه «حساب مجموع». انشر $(1 + 2x)^n$ واستنتج قيمة المجموع منشوراً يساويه.

$$S_n = \binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + \dots + 2^n \binom{n}{n}$$

1. **انشر بالحرف** خذ $a = 1$ و $b = 2x$. قوى الواحد كلّها واحد، فلا يبقى إلا $\binom{n}{r} (2x)^r$.

$$(1 + 2x)^n = 1 + \binom{n}{1} (2x) + \dots + \binom{n}{r} (2x)^r + \dots + \binom{n}{n} (2x)^n$$

2. **قارن بما هو مطلوب** الطرف الأيمن يحمل $2^r x^r \binom{n}{r}$ ، والمطلوب يحمل $2^r \binom{n}{r} x$. فالفرق كلّهُ أن x^r يجب أن يصير واحداً.

$$\binom{n}{r} (2x)^r = 2^r \binom{n}{r} \cdot x^r$$

3. ③ عوّض $x = 1$ وهذه هي الفكرة: المتطابقة صحيحة لكل x ، فلك أن تختار x الذي يخدمك. و $x = 1$ يجعل كل x^n واحداً، فيصير الطرف الأيمن هو S_n بعينه.

$$S_n = (1 + 2 \times 1)^n$$

4. ④ الناتج مجموع فيه $n + 1$ حدّاً، وقيمته قوّة واحدة. تحقّق عند $n = 2$: $1 + 2 \times 2 + 4 \times 1 = 9 = 3^2$.

$$S_n = 3^n$$

واحفظ الحيلة لا الجواب: كل مجموع معاملات $\binom{n}{r}$ هو منشور عند قيمة خاصّة. $x = 1$ يعطي المجموع كلّ بإشارات موجبة، و $x = -1$ يعطيه بإشارات متعاقبة، ومنه $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots = 0$. أداة واحدة لعائلة كاملة من الأسئلة.

$$\binom{n}{0} + c \binom{n}{1} + \dots + c^n \binom{n}{n} = (1 + c)^n$$

كم حدّاً في منشور $(a + b)^7$ بعد النشر والجمع؟

كيف أبدأ؟ الدليل r يمشي من أيّ عددٍ إلى أيّ عدد؟ عدّ الأعداد لا الفروق.

(أ) سبعة

(ب) مئة وثمانية وعشرون

(ج) ثمانية

ج. نعم، T_0 إلى T_7 ، أي $n + 1 = 8$ حدّاً. وتحقّق بالمثلث: السطر $n = 7$ فيه ثمانية أعداد،
1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.

عدد أجزاء مجموعة

وللمنشور نتيجة لا تبدو من صيغته: إن وضعت $a = b = 1$ اختفت الحروف كلّها وبقي عدد في مواجهة مجموع. الطرف الأيسر يصير 2^n ، والطرف الأيمن يصير مجموع المعاملات. وهذا يجيب عن سؤالٍ لم نسأله بعد: كم مجموعة جزئية لمجموعة فيها n عنصراً، كلّ الأحجام معاً؟

نتيجة (عدد أجزاء مجموعة)

من المنشور عند $a = b = 1$. والرتبة لا تخص هنا حجماً واحداً، بل تجمع الأحجام كلها من الصفر إلى n .

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{r} + \dots + \binom{n}{n}$$

$\text{card}(E) = n \implies \text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$ إن عدد المجموعات الجزئية من مجموعة مكونة من n عنصراً يساوي 2^n ، هكذا بلا شدة على الواو كما في الطبع. والربط بين السطرين هو أن $\binom{n}{r}$ يعدّ الأجزاء التي في كل منها r عنصراً، فمجموعها على r كلها يعدّ الأجزاء جميعاً.

الكتاب، الصفحة 140

انتبه: ودقّة في الشرط تستحقّ الذكر: النتيجة في الكتاب لا تذكر شرطاً على n ، أمّا المبرهنة المستعملة في برهانها فتشترط $n \geq 1$. والنتيجة صحيحة عند $n = 0$ أيضاً، فالمجموعة الخالية لها جزء واحد هو نفسها، و $2^0 = 1$. لكن برهان الكتاب لا يغطي هذه الحالة. وفي برهان النتيجة صفحة 140 سقط في الطباعة الحد الأوسط $\binom{n}{r}$ من السطر الثاني، فطبع مجموع فيه نقطتا حذفٍ متتاليتين. المقصود هو المجموع نفسه المكتوب في السطر الذي فوقه.

ثم يعود الكتاب في صفحة 141 بعنوان فكّر ويقول «طريقة ثانية»، فيبرهن النتيجة نفسها من جديد بلا منشور ولا معاملات، بالعدّ وحده. وهذا البرهان الثاني أقصر وأصفى، وهو الذي ينفعك إذا نسيّت الصيغة.

فكّر، صفحة 141: الطريقة الثانية. لتكن E مجموعةً فيها n عنصراً. نعدّ أجزائها دون أن نستعمل المنشور.

$$\text{card}(E) = n$$

1. **بناء الجزء المهمة على مراحل** إن كُلفت بإنشاء مجموعة جزئية A من E ، فأنجز المهمة على n مرحلة، مرحلة لكل عنصر. ولا تفكّر في حجم A أصلاً، فالحجم يخرج من القرارات لا يدخل فيها.

$$A \subset E$$

2. **في كل مرحلة قرار من اثنين** في المرحلة الأولى تقرّر: أتضع العنصر الأول في A أم لا تضعه؟ خياران اثنان. وفي الثانية كذلك، وهكذا إلى المرحلة n . ولا يؤثر قرار في قرار.

$$a_i \in A \quad \vee \quad a_i \notin A$$

3. **المبدأ الأساسي في العدّ** مراحل مستقلة متتابعة، فالعدد الكلي هو جداء الخيارات. n عاملاً، كل عامل اثنان.

$$\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_n$$

4. **الناتج** وهو الجواب نفسه الذي أعطاه المنشور. وتحقق بالصغير: $E = \{a, b\}$ لها الأجزاء $\emptyset$ و $\{a\}$ و $\{b\}$ و $\{a, b\}$ ، أربعة، و $2^2 = 4$.

$$\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$$

وهذا هو العدّ المزدوج من جهةٍ أخرى: الشيء نفسه معدوداً بطريقتين. الأولى تصفّ الأجزاء بحسب حجمها ثمّ تجمع، والثانية تبني الجزء بقراراتٍ ثنائية. ولما كان المعدود واحداً فالناتجان متساويان، وبهذا يصير المنشور عند $a = b = 1$ عبارةً عن جملةٍ في العدّ لا في الجبر.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

مجموعةٌ فيها ستّة عناصر. كم جزءاً لها فيه ثلاثة عناصر، وكم جزءاً لها في المجموع؟

كيف أبدأ؟ السؤالان مختلفان ويُخلطان كثيراً. أحدهما يحدّد الحجم والآخر لا يحدّده. اقرأ أيّهما أيّ.

(أ) 20 جزءاً ثلاثياً، و 20 جزءاً في المجموع

(ب) 120 جزءاً ثلاثياً، و 64 جزءاً في المجموع

(ج) 20 جزءاً ثلاثياً، و 64 جزءاً في المجموع

ج. نعم. $\binom{6}{3} = 20$ للأجزاء الثلاثية، و $2^6 = 64$ للأجزاء كلّها. وتحقق: مجموع السطر $n = 6$

$$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64$$

اختر $(1+x)^6 + (1-x)^6$.

كيف أبدأ؟ انشر الاثنين في ذهنك ولا تكتبهما. المنشور الثاني هو الأوّل بإشاراتٍ متعاقبة. فأيّ الحدود يبقى بعد الجمع، وأيّها يزول؟

$$2 + 15x^2 + 15x^4 + 2x^6 \quad (\text{أ})$$

$$2 + 30x^2 + 30x^4 + 2x^6 \quad (\text{ب})$$

$$2 + 12x + 30x^2 + 2x^6 \quad (\text{ج})$$

ب. نعم. حدود x الفردية تتعكس فتزول، والزوجية تتضاعف. فالباقى

$$2 \left(\binom{6}{0} + \binom{6}{2}x^2 + \binom{6}{4}x^4 + \binom{6}{6}x^6 \right) = 2(1 + 15x^2 + 15x^4 + x^6)$$

المصدر: الرياضيات، الجزء الثاني، الصفحات 139 إلى 142 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.