



الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

إنشاء قوائم من عناصر مجموعة

خاناتٌ تُمَلَأُ، وسؤالٌ واحد: هل يعود العنصر المستعمل أم لا؟

التحليل التوافقي . الوحدة 6 . الدرس 1

أن تعدّ من غير أن تكتب القائمة كلّها: هذا هو الدرس، وهو أول دروس التحليل التوافقي. والفكرة واحدة وبسيطة: ارسم خاناتٍ بعدد أماكن القائمة، ثم اسأل عن كلّ خانةٍ كم إمكاناً فيها، ثم اضرب. والفرق بين أنواع القوائم يقع كلّ في سؤالٍ واحد: هل يعود العنصر المستعمل ليُستعمل مرّةً أخرى؟ إن لم يعد تناقصت الأعداد، n ثم $n - 1$ ثم $n - 2$ ، وإن عاد بقي n في كلّ خانة. من الأول يخرج العامليّ $n!$ والتراتب P_n^n ، ومن الثاني تخرج القوائم مع تكرار n^r . ثلاث صيغ، وسؤالٌ واحدٌ يفرّق بينها.

التباديل على مجموعة

يفتح الكتاب الدرس بسطرٍ واحد: نتأمل مجموعةً غير خالية E مكوّنة من n عنصراً. وكلمة «قائمة» لا يعرفها هنا، فقد جاءت من نشاط الوحدة قبل الدرس. والذي يجب أن يكون واضحاً قبل كلّ شيء أن القائمة تحمل الترتيب في طياتها: لها بندٌ أولٌ وبندٌ ثانٍ وهكذا. وهذه ليست ملاحظةً جانبيةً، بل هي الفرق بين قائمةٍ ومجموعة: (a, b) و (b, a) قائمتان مختلفتان، بينما $\{a, b\}$ و $\{b, a\}$ مجموعةٌ واحدة.

نسَمّي تبديلاً على المجموعة E كلّ قائمة مكوّنة من n بنداً تضمّ جميع عناصر E . فالتبديل يستعمل عناصر E كلّها لا بعضها. ولأنّ البنود n والعناصر n وكلّهما حاضرة، فلا يمكن أن يتكرّر فيه عنصر: التبديل هو إعادة ترتيبٍ لما عندك، لا اختيارٌ منه.

خانة 4	خانة 3	خانة 2	خانة 1

خانات التبديل على $E = \{a, b, c, d\}$: أربعة عناصر، فأربع خانات. مكانٌ لكلّ بند، وبندٌ لكلّ مكان. ابدأ من اليمين، فالقائمة تُقرأ كما يُقرأ السطر.

مثال الكتاب صفحة 132. لتكن $E = \{a, b, c, d\}$. القائمتان (a, b, c, d) و (a, c, b, d) تبديلان على E ، وهما مختلفتان رغم أنّ حروفهما واحدة. كم تبديلاً على E ؟

$$E = \{a, b, c, d\}$$

1. ① املأ الخانة الأولى أمامك أربعة حروف، وأبها صلح أن يكون البند الأول. فللخانة الأولى أربع إمكانيات.

4

2. ② وما بقي للخانة الثانية الحرف الذي وضعته لا يعود: التبديل لا يكثر. فمهما كان اختيارك الأول، بقي ثلاثة حروف. ومع كل اختيار أولٍ ثلاثة اختياراتٍ ثانية، فالمجموع حاصل الضرب لا حاصل الجمع.

$$4 \times 3$$

3. ③ ثم الثالثة حرفان مستعملان، فبقي اثنان. والمنطق نفسه: كل واحدٍ من 4×3 بدايةً تفتح إمكانيات.

$$4 \times 3 \times 2$$

4. ④ والرابعة تفرض نفسها لم يبق إلا حرف واحد، فليس للخانة الأخيرة اختيار. وهذا هو معنى العامل 1 في آخر الجداء: ليس حشواً، بل خانة لا حرّة فيها.

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

والحالة العامة هي الحساب نفسه بحرفٍ بدل الرقم: n إمكناً للخانة الأولى، ثم $n - 1$ ، وهكذا حتّى تبقى خانة واحدة بإمكان واحد. لاحظ أنّ عدد العوامل هو عدد الخانات، وعدد الخانات هو n نفسه.

$$n \times (n - 1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

تعريف 1

$n \times (n - 1) \times \cdots \times 2 \times 1$ يُعطى عدد تباديل مجموعة مكوّنة من n عنصراً، حيث $n \geq 1$ ، بهذه الصيغة. $n!$ ونرمز إلى هذا العدد بالرمز $n!$ ونقرؤه « n عاملي ». ف $4! = 24$ و $6! = 720$ ، والعدد يكبر بسرعةٍ مخيفة: $10!$ يتجاوز ثلاثة ملايين. $0! = 1$ وهذا اصطلاح، بنص الكتاب «نصطلح». ليس ناتج حساب، ولا يُبرهن. وسترى بعد قليل لماذا اختير 1 ولم يُختَر 0 . الكتاب، الصفحة 132

انتبه: أشهر خطأ في هذا الباب أن يُحسب $0!$ صفرًا. وهو اصطلاح لا نتيجة، وقيّمته 1 . ومن جعله صفرًا أفسد كل كسرٍ مقامه $(n - r)!$ عند $r = n$ ، لأنّه يقسم على صفر. وهناك بالضبط سبب الاختيار: الصيغة $P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$ التي ستأتي في آخر الدرس تبقى صحيحةً عند $r = n$ فقط إذا كان $0! = 1$.

بكم طريقة يمكن أن يصطف خمسة تلاميذ في صف واحد؟

| كيف أبدأ؟ اسأل أولاً: هل تُستعمل العناصر كلها؟ وهل يتكرر عنصر؟ الجواب عن هذين السؤالين يحدّد الصيغة قبل أيّ حساب.

(أ) 5^5 ، أي 3125

(ب) $5! = 120$

(ج) $5 \times 4 = 20$

ب. نعم. خمسة أماكن وخمسة تلاميذ، وكلّهم حاضرون، فهذا تبديل: $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

الترتيب، أي القوائم دون تكرار

وماذا لو لم تُطلب العناصر كلّها؟ نسَمّي ترتيباً طوله r من المجموعة E كلّ قائمة دون تكرار طولها r ، أي كلّ قائمة مكوّنة من r بنداً مأخوذاً من عناصر E وبنودها مختلفة مثني مثني. فالجديد شيء واحد: الخانات صارت r بدل n . وكلّ ما عدا ذلك كما كان، فالعنصر المستعمل لا يعود.

خانة 3

خانة 2

خانة 1

--	--	--

ثلاث خانات لترتيب طوله 3 من $E = \{a, b, c, d, e\}$. لاحظ أنّ الخانات ثلاث والعناصر خمسة: عدد الخانات هو طول القائمة، لا حجم المجموعة.

مثال الكتاب صفحة 133. لتكن $E = \{a, b, c, d, e\}$. القائمتان (a, b, d) و (b, d, e) ترتيبان طولهما 3 من E . كم ترتيباً طوله 3 من E ؟

$$E = \{a, b, c, d, e\}, \quad r = 3$$

1. ① ارسم ثلاث خانات، لا خمساً طول القائمة 3 ، فالخانات ثلاث. العنصران الباقيان من E لا يدخلان القائمة، وهذا هو الفرق عن التبديل.

$$r = 3$$

2. ② املأها واحدة واحدة للأولى خمس إمكانات، وللثانية أربعة بعد أن خرج حرف من المتاح، وللثالثة ثلاثة.

$$5 \times 4 \times 3 = 60$$

3. **اقرأ العامل الأخير جيداً** العوامل ثلاثة، تبدأ من 5 وتنزل واحداً واحداً، فأخرها 3 . وبالحروف: يبدأ الجداء من n وينتهي عند $1 + n - r$ ، وهنا $3 = 1 + 3 - 5$. ليس $n - r$ ، فذلك يعطي عاملاً زائداً.

$$n - r + 1$$

العَدَد الصحيح هو عدد العوامل، لا قيمتها: r خانات تعني r عوامل، تبدأ عند n وتنزل. من عدِّ العوامل قبل أن يكتبها لم يخطئ في العامل الأخير أبداً.

$$n \times (n - 1) \times \cdots \times (n - r + 1)$$

تعريف 2

$n \times (n - 1) \times \cdots \times (n - r + 1)$ يُعطى عدد الترتيب التي طول كلٍّ منها r من مجموعة مكونة من n عنصراً بهذه الصيغة، وعواملها r .

P_n^r ونرمز إلى هذا العدد بالرمز P_n^r . والشرط $1 \leq r \leq n$ ، وهو مكتوب في الكتاب بصورتين مختلفتين على الصفحة نفسها، مرَّةً هكذا ومرَّةً $1 \leq r \leq n$. الصورتان تقولان الشيء نفسه.

الكتاب، الصفحة 133

انتبه: ولا تخط بين التبديل والترتيب. التبديل يستعمل العناصر n كلها، والترتيب يستعمل r منها فقط. وهما يلتقيان بوصفهما شيئاً واحداً في حالة واحدة، حين $r = n$: عندئذ $P_n^n = n!$ ، والترتيب الذي طوله n هو تبديل. وانتبه إلى مفاجئة تستحق أن تُرى: عند $r = n - 1$ يتساوى العددان أيضاً، لأنَّ آخر عوامل P_n^{n-1} هو 2 ، فيكون $P_n^{n-1} = n!$. جرِّبها: $5! = 120 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = P_5^4$. لكنَّ الشئتين يبقيان مختلفين هناك، لأنَّ الترتيب يترك عنصراً خارجاً. تساوي العددين لا يعني أنَّ المعدودين واحد.

مثال الكتاب صفحة 134، وعنوانه «السحب دون إعادة لأربع كرات من صندوق يضم تسع كرات». في صندوق تسع كرات مرقمة من 1 إلى 9 . نسحب أربع كراتٍ الواحدة بعد الأخرى دون إعادة، ونكتب الأرقام بترتيب السحب. كم عدداً من أربع منازل يمكن أن يخرج؟

$$n = 9, \quad r = 4$$

1. **سمِّ المسألة قبل أن تحسبها** قائمة طولها 4 من مجموعةٍ فيها 9 عناصر، وبنودها مختلفة لأنَّ الكرة لا تعود. هذا ترتيب، لا تبديل ولا قائمة مع تكرار.

$$P_9^4$$

2. اسحب الأولى الصندوق ممتلئ، فتسع إمكانات لمنزلة الآحاد.

9

3. وما بعدها ينقص واحداً في كل مرة الكرة المسحوبة خارج الصندوق، فبقي ثمانٍ للمنزلة الثانية، ثم سبعةٍ للثالثة، ثم ستٌ للرابعة. أربع خانات، أربعة عوامل.

$$9 \times 8 \times 7 \times 6$$

4. احسب والعامل الأخير 6 هو $9 - 4 + 1$ ، فتبيّن أنّك لم تكتب عاملاً زائداً ولا ناقصاً.

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$$

عبارة «دون إعادة» في نصّ المسألة هي الإشارة التي تحسم الصيغة. ابحث عنها أولاً، قبل أن تنظر في الأرقام: هي، أو ما يقوم مقامها مثل «مختلفة» و«لا يتكرّر»، تفصل بين P_n^r و n^r فصلاً تاماً.

$$P_9^4 = 3024$$

يتألّف مجلس إدارة نادٍ من سبعة أعضاء. بكم طريقة يُختار رئيسٌ ونائبٌ للرئيس وأمين سرّ؟

كيف أبدأ؟ المناصب الثلاثة مختلفة، فالترتيب مهمّ: من صار رئيساً ليس كمن صار أمين سرّ. وعضوٌ واحد لا يشغل منصبتين. أيّ صيغةٍ توافق ذلك؟

$$(أ) \quad 7^3 = 343$$

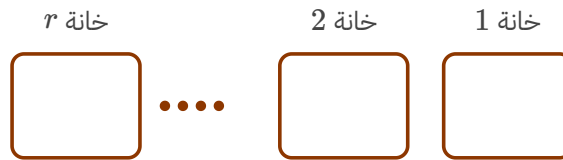
$$(ب) \quad 7! = 5040$$

$$(ج) \quad P_7^3 = 210$$

ج. نعم. ثلاث خانات من سبعة أعضاء دون تكرار: $7 \times 6 \times 5 = 210$. والعامل الأخير 5 هو $7 - 3 + 1$.

القوائم مع تكرار

وهنا ينقلب الحساب، والكتاب لا يضع لذلك أيّ علامة: لا تعريفاً مرّقماً، ولا مبرهنة، ولا خاصّة. النتيجة كلّها في سطرٍ واحد أزرق داخل الفقرة. فانتبه، لأنّ الفرق عمّا قبله كبير: إذا شُمح بالتكرار فالعنصر المستعمل يعود إلى المتاح، فلا ينقص شيء، ولكلّ خانةٍ n إمكاناً مهما كان موضعها.



قائمة مع تكرار طولها r : الخانات مفتوحة العدد، والنقاط الأربع للباقي. وفي كل واحدة منها n إمكاناً، في الأولى كما في الأخيرة.

تذكر: إن n^r هو عدد القوائم مع تكرار التي طولها r ويمكن إنشاؤها من مجموعة عدد عناصرها يساوي n . والقاعدة تُقرأ من الخانات مباشرة: r خانات، وفي كل منها n إمكاناً، فالجاء هو n مضروباً بنفسه r مرة.

انتبه: والخطأ الذي يقع فيه أكثر الناس هو قلب الرمز: r^n بدل n^r . والعلاج ليس الحفظ بل قراءة الصورة: الأساس هو ما يُعاد اختياره، أي حجم المجموعة n ؛ والأش هو عدد مرات الاختيار، أي عدد الخانات r . في كلمة SYRIA خمسة حروف وثلاث خانات، فالجواب 5^3 لا 3^5 ، والفرق بين 125 و 243 ليس صغيراً.

انتبه: ولاحظ ما لا يقوله هذا السطر الأزرق: ليس فيه شرط على r . التعريف الثاني اشترط $1 \leq r \leq n$ ، وهنا لا شرط، وذلك ليس سهواً من ثلاثة حروف يمكن تكوين كلمة من عشرة أحرف بلا صعوبة، أمّا ترتيب طول عشرة من مجموعة فيها ثلاثة عناصر فغير موجود أصلاً. التكرار يرفع السقف، وغيابه يضعه.

مثال الكتاب صفحة 135، وعنوانه «عدد القوائم مع تكرار». كم كلمة من ثلاثة حروف يمكننا تكوينها انطلاقاً من حروف كلمة SYRIA ؟

$$n = 5, \quad r = 3$$

1. ① عُدّ الحروف المتاحة في SYRIA خمسة حروف مختلفة، فالمجموعة فيها خمسة عناصر. والمطلوب كلمة من ثلاثة حروف، فالخانات ثلاث.

$$n = 5, \quad r = 3$$

2. ② اسأل عن التكرار، ولا تفترضه لا شيء في نص السؤال يمنع أن يتكرر حرف. فكلمة مثل SSS مقبولة، والحرف المستعمل يبقى متاحاً.

$$5, 5, 5$$

3. ③ اضرب خمس إمكانات للخانة الأولى، وخمس للثانية، وخمسة للثالثة، لأنّ المتاح لم ينقص.

$$5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$$

وضع الكتاب هذا المثال مباشرةً بعد مثال الكرات، وذلك مقصود: المسألتان متشابهتان في الشكل ومختلفتان في الجواب،
 $9 \times 8 \times 7 \times 6$ هناك و $5 \times 5 \times 5$ هنا. والذي فُرق بينهما جملةً واحدة في النص، «دون إعادة». اقرأ النص مرتين قبل أن
تكتب عاملاً واحداً.

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024, \quad 5 \times 5 \times 5 = 125$$

لتكن $S = \{1, 2, 5, 8, 9\}$. كم عدداً مؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر S ، من غير أي شرط آخر؟
| كيف أبدأ؟ ابحث في نص السؤال عن عبارة تمنع التكرار. إن لم تجد واحدة، فالرقم المستعمل يبقى متاحاً للمنزلة التالية.

(أ) $5^2 = 25$

(ب) $5 \times 4 = 20$

(ج) $2^5 = 32$

أ. نعم. منزلتان، وفي كلٍّ منهما خمسة أرقام متاحة، فالجواب $5 \times 5 = 25$. والتكرار مسموح ما دام النص ساكناً عنه.

الحساب بالعاملي

بقيت أداة واحدة، وهي التي تجعل الصيغ قابلةً للحساب فعلاً. والكتاب يضعها في كتلة «تكريساً للفهم» على الصفحة 134، أي خارج كل رتبة مرقمة، مع أنّها الصيغة التي يقوم عليها أكثر التمارين. ونضعها هنا في فقرة خاصة بها لهذا السبب بالذات.

والسؤال الأول الذي يطرحه الكتاب: كيف نفسّر $n!$ في مسائل التعداد؟ والجواب أنّه عدد الطرائق المختلفة لترتيب عناصر مجموعة فيها n عنصراً. فكلّما رأيت مسألة تضع الأشياء كلّها في المواضع كلّها، فأنت أمام عاملي.

مثال الكتاب صفحة 134. في سباق ستة أحصنة، ولا يصل اثنان منها في آنٍ واحد. كم نتيجةً مختلفة يمكن أن ينتهي إليها السباق؟

$$n = 6$$

1. **ما هي «النتيجة» هنا** النتيجة هي ترتيب الأحصنة الستة كلّها من الأول إلى السادس. لا يبقى حصان خارج الترتيب، ولا يحتلّ حصانان مرتبةً واحدة، لأنّ النص نفى التساوي.

$$6!$$

2. **إذن هي تبديل** ستة عناصر في ستة مواضع، وكلّها حاضرة: هذا تبديل على مجموعة الأحصنة، لا ترتيب جزئي.

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

3. احسب اضرب على مراحل: $6 \times 5 = 30$ ، ثم $4 \times 120 = 480$ ، ثم $3 \times 360 = 1080$ ، ثم $2 \times 720 = 1440$ ، والواحد لا يغير شيئاً.

$$6! = 720$$

وهذا هو الاختبار الذي يميّز التبديل بسرعة: هل يبقى عنصر خارج القائمة؟ إن كان الجواب لا، فهو تبديل وعدده $n!$. وإن بقي بعضها خارجاً فهو ترتيب وعدده P_n^r .

$$P_n^n = n!$$

تكريساً للفهم

$n! = P_n^r \times (n - r)!$ انظر إلى $n!$ على أنه جداء في مرحلتين: أول r عوامل منه هي P_n^r بعينها، وما بقي هو $(n - r)!$. فالعلاقة ليست حيلة بل قراءة للجداء نفسه.

$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$ ومن القسمة تخرج الصيغة التي تُستعمل في أكثر التمارين، صحيحة لأجل $1 \leq r \leq n$. وعند $r = n$ تعطي $\frac{n!}{0!} = n!$ ، وهنا يظهر فضل الاصطلاح $0! = 1$.

الكتاب، الصفحة 134

انتبه: واحذر أن تختزل $\frac{n!}{(n-r)!}$ إلى $\frac{n}{n-r}$. العامل جداء لا عامل، وشطب الرمز $!$ من البسط والمقام ليس اختزالاً. الاختزال الصحيح أن تشطب ذيل الجداء المشترك: في $\frac{10!}{8!}$ يُشطب $8!$ من الطرفين فيبقى $10 \times 9 = 90$ ، لا $\frac{10}{8}$.

تمارين الكتاب صفحة 135 تفتتح بعبارة «اختزل المقادير الآتية دون استعمال الآلة الحاسبة». وهذا شرط لا زينة: $21!$ عدد من عشرين رقماً، والآلة تعجز عنه أو تقرّبه. إليك النمطين اللذين يغطيان معظم التمارين.

$$\frac{21!}{20!}, \quad \frac{6! - 5!}{5!}$$

1. النمط الأول، ذيل مشترك اكتب البسط حتى تبلغ المقام: $21! = 21 \times 20!$. الآن المقام عامل في البسط، فيُشطب ويبقى 21 .

$$\frac{21!}{20!} = \frac{21 \times 20!}{20!} = 21$$

2. والقاعدة نفسها بعاملين $17! = 17 \times 16 \times 15!$ ، فيبقى $17 \times 16 = 272$. وعدد العوامل الباقية هو الفرق بين العددين، وهذا هو P_{17}^2 نفسه.

$$\frac{17!}{15!} = 17 \times 16 = 272$$

3. النمط الثاني، بسط فيه طرح لا تشطب هنا شيئاً قبل التحليل. اكتب $6! = 6 \times 5!$ ثم أخرج $5!$ عاملاً مشتركاً من البسط كله.

$$6! - 5! = 5! (6 - 1)$$

4. والآن يجوز الشطب بعد التحليل صار البسط جداءً، فيُشطب $5!$ ويبقى 5 . لو شطبنا قبل التحليل لخرج $6! - 1$ أو $5 - 6$ ، وكلاهما خطأ.

$$\frac{5! (6 - 1)}{5!} = 5$$

القاعدة في جملة: الشطب يمضي على الجداء ولا يمضي على الجمع ولا على الطرح. فإذا رأيت $+$ أو $-$ في البسط، فأخرج العامل المشترك أولاً، ثم اشطب.

$$\frac{a + b}{c} \neq \frac{a}{c} + b$$

اختزل $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ حيث $n \geq 1$.

| كيف أبدأ؟ اكتب البسط نازلاً حتى تبلغ المقام بالضبط، ثم اشطب. وعدد العوامل الباقية هو الفرق بين الدليلين.

$$\frac{n+1}{n-1} \quad (أ)$$

$$(n+1) \times n \times (n-1) \quad (ب)$$

$$(n+1) \times n \quad (ج)$$

ج. نعم. $(n+1)! = (n+1) \times n \times (n-1)!$ ، فيُشطب $(n-1)!$ ويبقى عاملان، لأنَّ الفرق بين $n+1$ و $n-1$ هو 2 .

المصدر: الرياضيات، الجزء الثاني، الصفحات 132 إلى 135 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.