الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

نهاية متتالية : تذكرة

مجالٌ مهما ضاق يبتلع كلّ الحدود إلّا عدداً منتهياً منها

نهاية متتالية . الوحدة 4 . الدرس 1

بسيطة

عنوان الدرس يقول «تذكرة»، والحقيقة أنّ فيه شيئاً جديداً تماماً. في الوحدة الأولى درست المتتاليات بلا نهايات، وفي الوحدة الثانية درست النهايات بلا متتاليات. هنا يلتقي الاثنان أوّل مرّة. والفكرة التي تحمل الدرس كلّه بسيطة في صياغتها وعميقة في أثرها: أن تكون ℓ نهايةً للمتتالية يعني أنّ أيّ مجالٍ مفتوح مركزه ℓ ، مهما ضاق، يضمّ كلّ الحدود بدءاً من دليلٍ معيّن. لا حديث عن اقترابٍ ولا عن مسافة، بل عن مجالٍ وما يقع داخله.

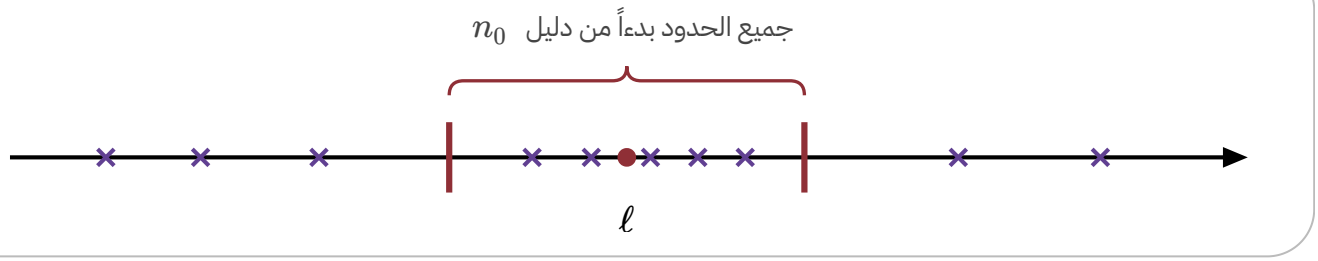
النهاية المنتهية، ومجالٌ يبتلع الحدود

لا تبدأ من الصيغة، بل من الصورة. ارسم على مستقيم الأعداد كلّ حدود المتتالية. إذا كان لها نهايةٌ حقيقيّة ℓ ، فمهما رسمتَ حولها مجالاً ضيّقاً، وجدتَ داخله كلّ الحدود إلّا عدداً منتهياً منها. هذا هو التعريف، حرفيّاً.

تعريف 1

نقول إنّ عدداً حقيقيّاً ℓ هو نهاية للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ إذا ضمَّ كلُّ مجال مفتوح مركزه ℓ جميع حدود المتتالية بدءاً من دليل معيّن، أو باستثناء عدد منته منها. ونقول إنّ المتتالية متقاربة، أو إنّها تتقارب من ℓ . $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$

الكتاب، الصفحة 101



المجال المفتوح حول ℓ يضمّ كلّ الحدود بدءاً من دليل، ويبقى خارجه عددٌ منتهٍ منها.

تذكّر: كلمتان تحملان التعريف. الأولى «كلُّ مجال»: لا يكفي أن ينجح مجالٌ واحد، بل كلّ مجالٍ مهما ضاق. والثانية «بدءاً من دليل معيّن»: لا يُطلب أن تكون كلّ الحدود داخله، بل كلّها ابتداءً من مكانٍ ما.

انتبه: الخطأ الأشهر هنا أن تقرأ التعريف بمجالٍ واحد. لو اكتفينا بذلك لصارت كلّ متتاليةٍ محدودة متقاربة، وهذا باطل. ولهذا بالضبط يعود الكتاب في المقطع الرابع من هذا الدرس ويعيد الحساب بتسامحٍ عامّ بدل رقمٍ بعينه.

متتاليات مرجعيّة، إلى الصفر

هذه المتتاليات، وقد عرّفها الكتاب على $n \geq 1$ ، تسعى جميعها إلى الصفر. يسمّيها الكتاب متتاليات مرجعيّة، وهي التي تُقاس عليها غيرها. $u_n = \frac{1}{n^3},\quad \frac{1}{n^2},\quad \frac{1}{n},\quad \frac{1}{\sqrt{n}}$

الكتاب، الصفحة 101

متتاليةٌ محدودة، أي أنّ كلّ حدودها تقع في المجال $]-1,\ 1[$. هل هي متقاربة؟

أ) نعم، لأنّ مجالاً واحداً يضمّ كلّ حدودها
ب) لا يمكن الحكم. الحدود قد تتأرجح بلا استقرار
ج) لا، لأنّ نهاية المتتالية المحدودة صفرٌ دائماً

ب. نعم. أن تكون المتتالية محدودةً شرطٌ لازم للتقارب وليس كافياً. $(-1)^n$ محدودة وغير متقاربة، و $\frac{1}{n}$ محدودة ومتقاربة، والحدّية وحدها لا تفرّق بينهما.

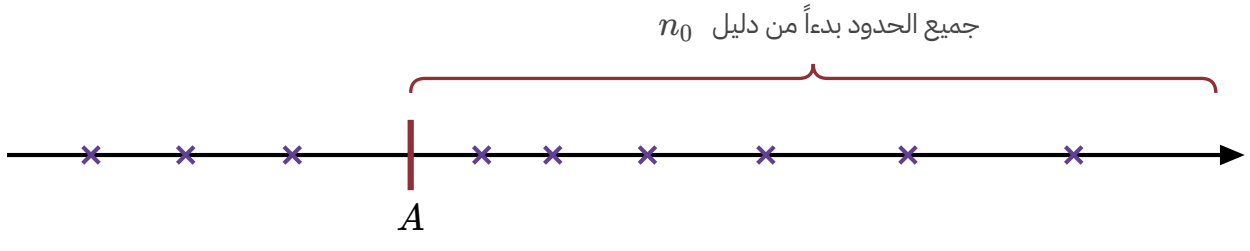
النهاية اللّانهائيّة

الصورة نفسها، لكنّ المجال يتغيّر. بدل مجالٍ ضيّقٍ حول عدد، نأخذ مجالاً مفتوحاً نحو اليمين بلا نهاية. والشرط لم يتبدّل: كلّ الحدود بدءاً من دليل.

تعريف 2

نقول إنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تسعى إلى $+\infty$ إذا ضمَّ كلُّ مجال من النمط $]A,\ +\infty[$ جميع حدود المتتالية بدءاً من دليل معيّن. ونقول إنّ المتتالية تتباعد إلى $+\infty$. $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

الكتاب، الصفحة 101

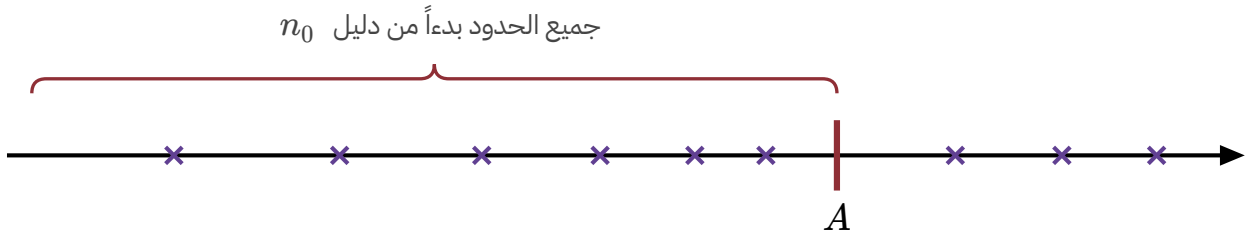


المجال $]A,\ +\infty[$ مهما بعُد A يضمّ كلّ الحدود بدءاً من دليل.

تعريف 3

$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ نقول إنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تسعى إلى $-\infty$ إذا ضمَّ كلُّ مجال من النمط $]-\infty, A[$ جميع حدود المتتالية بدءاً من دليل معيّن.

الكتاب، الصفحة 102



الحالة المقابلة، $]-\infty, A[$. الكتاب لا يرسمها، وقد أضفناها لتكتمل الصورة الثلاثيّة.

متتاليات مرجعيّة، إلى اللانهاية

$u_n = n^3,\quad n^2,\quad n,\quad \sqrt{n}$ تؤدّي هذه المتتاليات دور متتالياتٍ مرجعيّة أيضاً، وهي تتباعد إلى $+\infty$.

الكتاب، الصفحة 102

المتتالية الهندسيّة، أربع حالات

متتاليةٌ واحدة تستحقّ مبرهنةً كاملةً لنفسها، لأنّ كثيراً من التمارين تُرجَع إليها بحيلةٍ أو أخرى: q^n . والمبرهنة تفصّل أربع حالات، وفيها حالةٌ يُنسى وجودها.

مبرهنة 1

$-1 < q < 1 \implies \lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ الأساس بين سالب واحدٍ وواحد، حصراً، فالقوى تتلاشى.

$q > 1 \implies \lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ الكتاب يكتب هذه الحالة في صورة $1 < q$.

$q \leq -1$ ليس للمتتالية نهاية. لا حقيقيّة ولا لانهائيّة: الحدود تقفز بين الموجب والسالب ولا تستقرّ. وهذه هي الحالة الثالثة في ترتيب الكتاب.

$q = 1 \implies \lim_{n\to+\infty} q^n = 1$ المتتالية ثابتة، وجميع حدودها تساوي واحداً. يضعها الكتاب رابعةً، بعد الحالة التي بلا نهاية.

الكتاب، الصفحة 102

انتبه: الحالة الرابعة هي الفخّ. $q = -1$ ليست داخل الحالة الأولى، لأنّ الشرط $-1 < q$ صارم. عندها $u_n = (-1)^n$ تتناوب بين 1 و -1 ، ولا نهاية لها. ومن هنا نتيجةٌ عامّة: أن تكون متتاليةٌ غير متقاربة لا يعني أنّها تسعى إلى $\pm\infty$ ، هناك احتمالٌ ثالث.

ما نهاية المتتالية $u_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^n$ ؟

أ) لا نهاية لها

ب) $+\infty$ ، لأنّ $|q| > 1$

ج) 0 ، لأنّ الأساس سالب

أ. نعم. الأساس -1.5 يحقّق $q \leq -1$ ، وهي الحالة الثالثة في ترتيب الكتاب، ونصّها أنّه ليس للمتتالية نهاية.

من التعريف إلى الحساب

حتّى الآن التعريف صورةٌ لا يُحسب بها. هنا يتحوّل إلى حساب: يُعطى تسامحٌ، ويُطلب الدليل الذي تصير منه كلّ الحدود داخله.

مثال الكتاب. المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ نهايتها 3 . المطلوب: عيّن n_0 بحيث يكون u_n في المجال $]2.99,\ 3.01[$ عند كلّ $n > n_0$.

$$u_n = \frac{3n-1}{n+1}$$

1. الانتماء إلى مجال هو متراجحة بقيمة مطلقة أن يقع u_n في مجالٍ مركزه 3 ونصف طوله 0.01 يعني أن يبعد عن 3 أقلّ من 0.01 . وهذا هو معنى القيمة المطلقة.

$$u_n \in]2.99,\ 3.01[\iff |u_n - 3| < 0.01$$

2. احسب الفرق نطرح ونوحّد المقام. لاحظ أنّ الفرق سالب، فالقيمة المطلقة تقلب إشارته.

$$u_n - 3 = \frac{3n-1-3(n+1)}{n+1} = \frac{-4}{n+1}, \qquad |u_n - 3| = \frac{4}{n+1}$$

3. اقلب المتراجحة المقام $n+1$ موجبٌ تماماً، وهذا هو ما يبرّر القلب. الكتاب يضع هنا كلمة «علّل» ويترك الخطوة للقارئ، فهي ليست آليّةً بل تحتاج شرطاً.

$$\frac{4}{n+1} < \frac{1}{100} \iff n+1 > 400$$

4. اقرأ الجواب من $n+1>400$ يأتي $n>399$. والكتاب يقول صراحةً: $n_0=399$ أو أيّ عددٍ أكبر منه.

$$n_0=399$$

المطلوب عتبة، لا قيمة وحيدة. كلّ عددٍ أكبر من 399 جوابٌ صحيح، ومن ظنّ أنّ للجواب صيغةً واحدة فقد أساء فهم السؤال.

$$|u_n-\ell|<\alpha,\quad n>n_0$$

وهنا الخطوة التي تحوّل المثال إلى برهان: الكتاب يعيد الحساب نفسه بتسامحٍ عامّ. المطلوب: من أيّ دليلٍ يقع u_n في $I_\alpha=]3-\alpha,\,3+\alpha[$ ؟

$$\alpha>0$$

1. الخطوات نفسها، بحرفٍ بدل رقم لا شيء في الحساب السابق كان يعتمد على كون العدد 0.01 . نضع α مكانه وتمرّ السلسلة كما هي.

$$\begin{aligned}|u_n-3|&<\alpha\\ \iff\ &\frac{4}{n+1}<\alpha\\ \iff\ &n+1>\frac{4}{\alpha}\end{aligned}$$

2. الآن التعريف محقَّق لأيّ α مهما صغر يوجد دليلٌ تصير منه كلّ الحدود داخل I_α . وهذا بالضبط نصّ التعريف: كلُّ مجال، لا مجالٌ واحد.

$$n_0\geq\frac{4}{\alpha}\implies\forall n>n_0:u_n\in I_\alpha$$

الفرق بين المثال والبرهان حرفٌ واحد: رقمٌ يصير α . ما دام الحساب لم يستعمل قيمة الرقم، فهو صالحٌ لكلّ قيمة.

$$I_\alpha=]3-\alpha,\,3+\alpha[$$

تطبيق: مجموعٌ يتحوّل إلى قوّة

مثال الكتاب الثالث، وهو يجمع الوحدة الأولى بهذه. المطلوب: أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متقاربة واحسب نهايتها.

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \cdots - \frac{1}{2^n}$$

1. اجمع ما يُطرح في قوس أمامك واحدٌ ناقص سلسلة طرحٍ طويلة. ضع المطروحات كلّها في قوسٍ واحد، وانتبه: أمام القوس إشارة ناقص، فتصير كلّ إشارات الداخل موجبة.

$$u_n = 1 - \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

2. ما في القوس متتالية هندسيّة حدّها الأوّل $\frac{1}{2}$ وأساسها $\frac{1}{2}$ وعدد حدودها n . صيغة المجموع من الوحدة الأولى، والكتاب يستعملها هنا من دون أن يعيد استنتاجها.

$$\frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

3. والمفاجأة الواحد يذهب مع الواحد، ولا يبقى إلّا قوّة. السلسلة الطويلة كانت متتاليةً هندسيّةً في ثوبٍ آخر.

$$u_n = 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

4. طبّق المبرهنة الأساس $\frac{1}{2}$ يحقّق $-1 < q < 1$ ، وهي الحالة الأولى.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

قبل أن تحسب نهاية مجموع، اسأل إن كان المجموع نفسه له صيغةٌ مغلقة. هنا اختصرت الصيغة المسألة كلّها إلى سطرٍ واحد.

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

الكتاب يعود إلى المتتالية نفسها في فقرة «فَكِّر» ويصل إلى النتيجة من طريقٍ آخر تماماً: يحسب u_{n+1} ويجمع $1 - \frac{1}{2}$ في $\frac{1}{2}$ ، فيظهر أنّ $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n$. أي إنّ المتتالية هندسيّةٌ بالتعريف التدريجيّ، لا بالصيغة الصريحة. طريقان، ونتيجةٌ واحدة.

سؤالان يقيسان الفهم

الكتاب يختم بسؤالين في فقرة «تكريساً للفهم»، وكلاهما يقيس دقّة اللغة قبل أن يقيس الحساب.

موجب وموجبٌ تماماً

$a \geq 0$ كلمة «موجب» في الكتاب تعني أكبر أو يساوي الصفر. الصفر موجب.

$a > 0$ أمّا «موجب تماماً» فتعني أكبر من الصفر حصراً. هذه الكلمة تقرّر المتراجحة كلّها.

الكتاب، الصفحة 104

السؤال الأوّل: لماذا إذا تقاربت متتاليةٌ ذات حدودٍ موجبة كانت نهايتها موجبة؟ الكتاب يبرهن بنقض الفرض.

$$u_n \geq 0 \implies \ell \geq 0$$

1. افترض العكس نفترض أنّ النهاية ℓ سالبةٌ تماماً، ونبحث عن تناقض.

$$\ell < 0$$

2. اختر مجالاً لا يبلغ الصفر بما أنّ ℓ سالبٌ تماماً، يمكن رسم مجالٍ مفتوح مركزه ℓ يقع كلّه على يسار الصفر. وهنا تُستعمل كلمة «كلّ مجال» من التعريف.

$$]\ell - r,\, \ell + r[\subset]-\infty,\, 0[$$

3. والتناقض التعريف يوجب أن يضمّ هذا المجال كلّ الحدود بدءاً من دليل. لكنّ كلّ الحدود موجبة، فلا يقع فيه أيّ حدّ. تناقض.

$$\ell \geq 0$$

لاحظ ما لم يُثبَت: أنّ النهاية موجبةٌ تماماً. المتتالية $\dfrac{1}{n}$ كلّ حدودها موجبةٌ تماماً ونهايتها الصفر. الإشارة الصارمة لا تنجو من العبور إلى النهاية.

$$u_n > 0 \implies \ell \geq 0$$

انتبه: هذه أهمّ جملةٍ في الدرس للامتحان: من حدودٍ موجبةٍ تماماً لا يتبع أنّ النهاية موجبةٌ تماماً، بل أنّها موجبة فقط. في العبور إلى النهاية يصير $<$ هو $\leq$ ، دائماً.

المتتاليتان تحقّقان $u_n < v_n$ عند كلّ n ، وكلتاهما متقاربة. ماذا نستنتج عن النهايتين؟

أ) $\lim u_n < \lim v_n$

ب) لا شيء، فالمتراجحة بين الحدود لا تقول شيئاً عن النهايات

ج) $\lim u_n \leq \lim v_n$

ج. نعم، وهذا الضعف مقصود. الصارم يصير غير صارمٍ في العبور، تماماً كما في مثال الكتاب مع $\frac{1}{n}$.

والسؤال الثاني يربط الدرس بالوحدة الثانية: التماثل بين التعريفين واضح، لأنّ المتتاليات حالاتٌ خاصّة من التوابع. أن يكون $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ يعني أنّ $f(x) > M$ بدءاً من عتبة A ، وأن يكون $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ يعني أنّ $u_n > M$ بدءاً من دليل n_0 . العتبة صارت دليلاً، ولا شيء غير ذلك تغيّر. من هذا الرباط تُبنى مبرهنة الدرس التالي.

المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 101 إلى 105 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.