بسيطة

الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

تقارب المتتاليات المطَّردة

اطّرادٌ وحدَّ في الجهة نفسها، وتُصبح النهاية موجودةً قبل أن تُحسب

نهاية متتالية . الوحدة 4 . الدرس 3

حتّى الآن كنت تحسب النهاية ثمّ تعرف أنّها موجودة. هذا الدرس يقلب الترتيب: تثبت أنّ النهاية موجودةٌ من دون أن تعرف قيمتها. الأداة شرطان بسيطان، اطّرادٌ وحدّ، لكنّ فيهما دقّةً تُفقد بسهولة: الحدّ يجب أن يقف في الجهة التي تمضي إليها المتتالية، لا في الجهة التي جاءت منها.

الحدود العليا والدنيا

قبل الاطّراد نحتاج مفردةً واحدة: متى نقول إنّ متتاليةً محدودة؟ والجواب ليس عن المتتالية بل عن عددٍ يقف في طريقها.

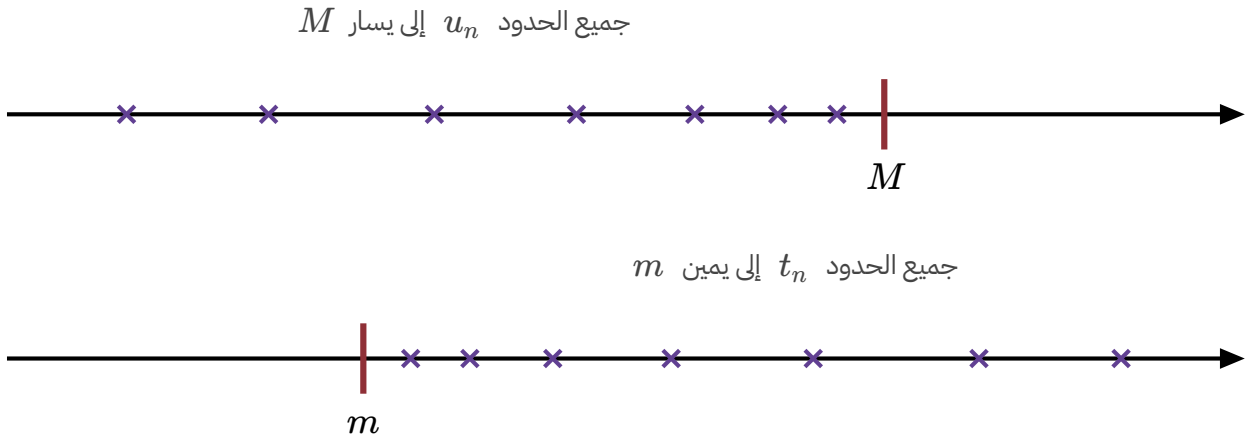
تعريف 4

نقول إنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ محدودةٌ من الأعلى إذا وُجد عددٌ حقيقيّ M يحقّق المتراجحة عند كلّ عددٍ طبيعيّ n : $\forall n : u_n \leq M$. ويُسمّى M عنصراً راجحاً على المتتالية.

ونقول إنّ متتاليةً $(t_n)_{n\geq 0}$ محدودةٌ من الأدنى إذا وُجد عددٌ حقيقيّ m يحقّق المتراجحة عند كلّ n : $\forall n : t_n \geq m$. ويُسمّى m عنصراً قاصراً عن المتتالية.

ونقول إنّ متتاليةً $(w_n)_{n\geq 0}$ محدودةٌ إذا كانت محدودةً من الأعلى ومن الأدنى في آنٍ معاً: $m \leq w_n \leq M$

الكتاب، الصفحة 110



العنصر الراجح يقف على يمين كلّ الحدود، والعنصر القاصر على يسارها. ولا يُشترط أن يكون أيٌّ منهما حدّاً من حدود المتتالية.

تذكّر: الحدّ ليس وحيداً أبداً. كلّ عددٍ أكبر من عنصرٍ راجح هو عنصرٌ راجحٌ أيضاً، وكلّ عددٍ أصغر من عنصرٍ قاصر هو عنصرٌ قاصر. فإذا وجدتَ حدّاً فقد وجدتَ ما لا نهاية له من الحدود، والسؤال عن أصغرها سؤالٌ آخر تماماً.

انتبه: انتبه إلى نفي العبارة، فالكتاب يكتبه بنفسه: أن تكون متتاليةٌ غير محدودةٍ من الأعلى يعني أنّه مهما كبر العدد A وُجد حدٌّ واحدٌ u_N يتجاوزه. حدٌّ واحد يكفي، لا كلّ الحدود. هذا هو الفرق بين النفي الصحيح والنفي المتسرّع.

مثال الكتاب، وفيه يُثبَت الحدّان معاً على متتاليةٍ واحدة. المطلوب: أثبت أنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ محدودةٌ من الأعلى ومن الأدنى.

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

1. الحدّ الأدنى يأتي من اطّراد الجذر من $n+1 > n$ ومن كون تابع الجذر متزايداً يأتي $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ ، أي إنّ الفرق موجبٌ تماماً عند كلّ n .

$$u_n > 0 \implies m = 0$$

2. الحدّ الأعلى يحتاج حيلة الفرق بين جذرين يصغر مع n ، لكنّ ذلك لا يُقرأ من الصيغة كما هي. نضرب بالمرافق ونقسم عليه، فينقلب الفرق إلى كسر.

$$u_n = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

3. الآن يُقرأ الحدّ مباشرة المقام أكبر من واحدٍ أو يساويه عند كلّ $n \geq 0$ ، لأنّ $\sqrt{n+1} \geq 1$. وكسرٌ بسطه واحدٌ ومقامه لا يقلّ عن واحد لا يتجاوز الواحد.

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 1 \implies u_n \leq 1 \implies M = 1$$

المتتالية محدودة، بين 0 و 1 . ولاحظ الفرق بين العنصرين: الصفر لا يُبلَغ أبداً، أمّا الواحد فهو u_0 نفسه. العنصر الراجح قد يكون حدّاً من حدود المتتالية وقد لا يكون.

$$0 < u_n \leq 1$$

المبرهنتان، والفرق بينهما شرطٌ واحد

خذ متتاليةً متزايدة. أمامها احتمالان لا ثالث لهما: إمّا أن يوقفها حدٌّ من الأعلى، وإمّا ألّا يوقفها شيء. المبرهنتان الآتيتان تقولان ما يحدث في كلّ حالة، والفرق بينهما كلمةٌ واحدة: «غير».

مبرهنة 7

$u_n \leq u_{n+1}$
$\forall A\ \exists N : u_N > A$ كلّ متتالية متزايدة وغير محدودة من الأعلى تنتهي إلى $+\infty$. السطر الأوّل هو الاطّراد،
$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
والثاني هو عدم الحدّية مكتوبةً كما يكتبها البرهان بعد قليل، والثالث النتيجة. الشرطان معاً، لا أحدهما.

$u_{n+1} \leq u_n$
$\forall A\ \exists N : u_N < A$ وكلّ متتالية متناقصة وغير محدودة من الأدنى تنتهي إلى $-\infty$. البرهان بالطريقة نفسها،
$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
والكتاب يتركه تمريناً.

الكتاب، الصفحة 111

الكتاب يبرهن الحالة الأولى ويترك الثانية تمريناً. البرهان قصيرٌ ويستحقّ القراءة، لأنّه يستعمل التعريف كما هو. المطلوب: أثبت المبرهنة السابعة.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

1. ابدأ من عددٍ كيفما كان ليكن A عدداً حقيقيّاً أيّاً كان. المطلوب أن نجد دليلاً تصير منه كلّ الحدود أكبر منه، فهذا هو نصّ تعريف النهاية اللانهائيّة.

$$A \in \mathbb{R}$$

2. عدم الحدّية يعطي شاهداً واحداً بما أنّ المتتالية غير محدودة من الأعلى، لا يصلح A حدّاً راجحاً، فيوجد حدٌّ واحد على الأقلّ يتجاوزه. سمِّه u_N .

$$\exists N : u_N > A$$

3. والاطّراد ينشر الشاهد على ما بعده هنا يدخل الشرط الثاني. المتتالية متزايدة، فكلّ حدٍّ بعد الدليل N لا يقلّ عن u_N ، وبالتالي يتجاوز A هو أيضاً.

$$n > N \Longrightarrow u_n \geq u_N > A$$

4. وهذا هو التعريف حرفيّاً كلّ الحدود بدءاً من الدليل N تقع في المجال $]A, +\infty[$ ، و A كان كيفما كان.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

شاهدٌ واحد من عدم الحدّية، ثمّ الاطّراد ينشره على كلّ ما بعده. هذان الشرطان يعملان معاً، ولا يكفي أيٌّ منهما وحده.

$$u_n \geq u_N > A, \qquad n > N$$

مبرهنة 8

كلّ متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى متقاربة. الصيغة تجمع الشرطين في سطر: الحدود تصعد، ويقف فوقها M . $u_n \le u_{n+1} \le M$

وكلّ متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى متقاربة. الحدود تنزل، ويقف تحتها m . $m \le u_{n+1} \le u_n$

الكتاب، الصفحة 111

تذكّر: لاحظ التقاطع: المتزايدة تُقرن بالحدّ من الأعلى، والمتناقصة بالحدّ من الأدنى. الحدّ يقف حيث تمضي المتتالية، لا حيث جاءت منها. أمّا الجهة الأخرى فمجّانيّة: متتاليةٌ متزايدة محدودةٌ من الأدنى بحدّها الأوّل، دائماً وبلا إثبات، ولذلك لا تُذكر.

انتبه: الكتاب يقول عن هذه المبرهنة صراحةً: هذه خاصّة مهمّة من خواصّ مجموعة الأعداد الحقيقيّة، سنقبلها دون إثبات. ليست مبرهنةً تُشتقّ ممّا سبق، بل خاصّةٌ للأعداد الحقيقيّة نفسها. لا تبحث عن برهانها في هذا الكتاب، لأنّه ليس فيه.

انتبه: وأهمّ ما لا تقوله: المبرهنة لا تعطي النهاية، بل تثبت وجودها فقط. في حالة المتزايدة المحدودة من الأعلى تكون النهاية أصغر العناصر الراجحة، ويسمّيها الكتاب الحدّ الأعلى للمتتالية. وفي حالة المتناقصة المحدودة من الأدنى تكون أكبر العناصر القاصرة، ويسمّيها الحدّ الأدنى للمتتالية. والعنصر الذي وجدتَه أنت ليس بالضرورة هو، فلا تخلط بين عنصرٍ راجحٍ ونهاية.

متتاليةٌ متزايدة ومحدودة من الأدنى بالعدد 0 . ماذا نستنتج؟

أ) لا شيء. الحدّ يقف في الجهة الخطأ
ب) أنّها متقاربة، بحسب مبرهنة 8
ج) أنّها تتباعد إلى $+\infty$ ، بحسب مبرهنة 7

أ. نعم. المتزايدة محدودةٌ من الأدنى بحدّها الأوّل على أيّ حال، فالمعطى لا يضيف شيئاً. المطلوب حدٌّ من الأعلى، وهو الذي يوقف الصعود.

ما لا تقوله المبرهنتان

الكتاب يخصّص رُكناً كاملاً لهدم عكسين شائعين، ويهدمهما بمثالين مبنيّين بعناية. كلاهما يستعمل $(-1)^n$ لخلط الترتيب: الأوّل يُنزل نصف الحدود إلى الصفر، والثاني يبقيها موجبةً لكن يجعلها تصعد وتنزل.

العكس الأوّل: غير محدودة من الأعلى، إذن تسعى إلى $+\infty$. المطلوب: مثالٌ مضادّ.

$$u_n = n + (-1)^n n$$

1. افصل الحالتين عند الدليل الزوجيّ يكون $(-1)^n = 1$ فيتضاعف، وعند الفرديّ يكون -1 فيتلاشى الحدّان.

$$u_{2n} = 4n, \qquad u_{2n+1} = 0$$

2. غير محدودة من الأعلى الحدود الزوجيّة تكبر بلا حدّ، فلا عددٌ يقف فوقها جميعاً.

$$\lim_{n \to +\infty} u_{2n} = +\infty$$

3. ومع ذلك لا تسعى إلى $+\infty$ لأنّ نصف الحدود يساوي صفراً عند كلّ دليلٍ فرديّ. أيّ مجالٍ من النمط $]A, +\infty[$ مع $A > 0$ يفوته عددٌ لا نهائيٌّ من الحدود، والتعريف يطلب أن يفوته عددٌ منتهٍ فقط.

$$u_{2n+1} = 0$$

عدم الحدّية وحده لا يعطي نهايةً لانهائيّة. يلزم معه الاطّراد، وهو ما تشترطه مبرهنة 7 صراحةً.

$$u_n = n + (-1)^n n$$

العكس الثاني: تسعى إلى $+\infty$ ، إذن هي متزايدة. المطلوب: مثالٌ مضادّ.

$$u_n = 2n + (-1)^n\, n$$

1. افصل الحالتين المعامل 2 يمنع التلاشي هذه المرّة، فيبقى الحدّ الفرديّ موجباً ويكبر أيضاً، لكن أبطأ.

$$u_{2n} = 6n$$
$$u_{2n+1} = 2n + 1$$

2. تسعى إلى اللانهاية كلّ حدٍّ لا يقلّ عن n ، والمقارنة تكفي: مبرهنة 6 من الدرس السابق تنقل النتيجة.

$$u_n \geq n \implies \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

3. وليست متزايدة قارن حدّين متتاليين عند الأدلّة الصغيرة: القيم تكبر في المجمل لكنّها لا تصعد بترتيب. الكتاب يصفها بأنّها في تزايدٍ ولكن دون ترتيب.

$$u_2 = 6, \quad u_3 = 3, \quad u_4 = 12, \quad u_5 = 5$$

السعي إلى اللانهاية يقول شيئاً عن المدى البعيد، لا عن كلّ خطوة. المتتالية قد تنزل مرّاتٍ لا نهائيّة وتبلغ $+\infty$ رغم ذلك.

$$u_4 = 12 > u_5 = 5$$

تطبيق على متتالية تدريجيّة

الآن يجتمع الدرسان. الدرس السابق قال: إن كانت للمتتالية التدريجيّة نهايةٌ حقيقيّة ℓ ، وكان f مستمرّاً عند ℓ ، فهي حلٌّ للمعادلة $f(x)=x$ ، ولم يعطِ التقارب. وهذا الدرس يعطي التقارب. الترتيب بينهما ليس اختياريّاً.

مثال الكتاب. المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرّفة بـ $u_0=1$ و $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$. المطلوب: أثبت تقاربها واحسب نهايتها.

$$u_0=1, \qquad u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$$

1. الشرطان، كلاهما بالتدريج يُثبَت بالتدريج أنّ المتتالية متزايدة وأنّها محدودةٌ من الأعلى بالعدد 2 . الكتاب يترك الإثبات تمريناً، والصيغتان هما ما يُبرهن.

$$P(n):\ u_{n+1}>u_n$$
$$Q(n):\ u_n<2$$

2. المبرهنة الثامنة تعطي الوجود متزايدة ومحدودة من الأعلى، والحدّ في الجهة الصحيحة. إذن توجد نهايةٌ حقيقيّة، ولا نعرف قيمتها بعد.

$$\exists \ell\in\mathbb{R}:\ \lim_{n\to+\infty} u_n=\ell$$

3. والآن فقط تُحسب التابع $f(x)=\sqrt{1+x}$ مستمرٌّ عند ℓ ، فنتيجة الدرس السابق تنطبق: النهاية حلٌّ للمعادلة. والنهاية موجبةٌ بطبيعة الحال، لأنّ كلّ الحدود جذور.

$$\ell=\sqrt{1+\ell}\ \Longrightarrow\ \ell^2-\ell-1=0$$

4. واحدةٌ من الجذرين للمعادلة جذران، أحدهما سالب. الشرط $\ell>0$ يستبعده، ولولاه لبقي الجواب مزدوجاً.

$$x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0, \qquad \ell=x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

الترتيب هو الدرس كلّه: أوّلاً الوجود بالمبرهنة الثامنة، ثمّ القيمة بالمعادلة. ولاحظ أنّ الحدّ 2 الذي استعملناه ليس النهاية؛ النهاية تساوي 1.618 تقريباً.

$$\boxed{\ell=\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

في المثال أعلاه استُعمل العدد 2 حدّاً راجحاً، والنهاية $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. ما العلاقة بينهما؟

أ) لا علاقة، فالحدّ اختياريّ والنهاية محسوبة
ب) النهاية أصغر من الحدّ، وهي أصغر العناصر الراجحة
ج) النهاية تساوي الحدّ إذا كان الحدّ أصغر ما يمكن

ب. نعم. $2 > 1.618$ ، والحدّ الذي تختاره يكفي أن يكون كافياً، لا أن يكون الأصغر. الكتاب يسمّي النهاية الحدّ الأعلى للمتتالية.

انتبه: لا تقلب الترتيب. من حلّ $f(x) = x$ أوّلاً فقد وجد مرشّحاً لا نهاية، وقد لا تتقارب المتتالية أصلاً. الشرطان يأتيان قبل المعادلة، لا بعدها.

كيف نجد حدّاً أصلاً

بقي سؤالٌ عمليّ: المبرهنة تطلب حدّاً، فمن أين يأتي؟ الكتاب يقول أوّلاً ما لا يقال كثيراً: ليست هناك طرائق عامّة. ثمّ يعطي خمس قواعد صغيرة تُستعمل بالتركيب.

خمس قواعد للحصر

$S = a_1 + \cdots + a_k,\ a_i > 0 \implies S > a_i$ مجموع أعدادٍ حقيقيّة موجبة أكبر من أيٍّ منها. أبسط القواعد وأكثرها استعمالاً.

$k\,m \le S \le k\,M$ إذا كان S مجموع k عدداً، و m أصغرها و M أكبرها. تحوّل حصر الحدّ الواحد إلى حصر المجموع.

$a \le b \iff \frac{1}{a} \ge \frac{1}{b}$: $ab > 0$ المقلوب يقلب الجهة، والشرط $ab > 0$ ليس زينة.

$a \le b \iff \sqrt{a} \le \sqrt{b}$: $a, b \ge 0$ الجذر يحفظ الجهة على الأعداد الموجبة.

$a \le c,\ b \ge d \implies \frac{a}{b} \le \frac{c}{d}$ الأعداد الأربعة موجبةٌ تماماً. لاحظ الاتّجاهين المتعاكسين: البسط يصغر والمقام يكبر.

الكتاب، الصفحة 113

انتبه: القاعدة الخامسة هي التي تُخطأ. للحصول على $\dfrac{a}{b} \le \dfrac{c}{d}$ تحتاج شرطين معاً، $a \le c$ في البسط و $b \ge d$ في المقام. من قارن البسطين فقط وترك المقامين حصل على متراجحةٍ قد تكون معكوسة.

للحصر من الأعلى على $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$ عند $n \geq 1$ ، أيّ قاعدتين تُركَّبان؟

أ) الرابعة ثمّ الخامسة
ب) الأولى وحدها
ج) الثالثة ثمّ الثانية

ج. نعم. من $0 < n < n+1 < n+2$ تعطي الثالثة $\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ ، وأكبر الثلاثة هو $\frac{1}{n}$. ثمّ الثانية بثلاثة حدود تعطي $u_n \leq \frac{3}{n}$.

المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 110 إلى 114 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.