بسيطة

الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

متتاليات متجاورة

متتاليتان تُطبقان على عددٍ من الجهتين، فتُثبتان وجوده قبل أن تعرفاه

نهاية متتالية . الوحدة 4 . الدرس 4

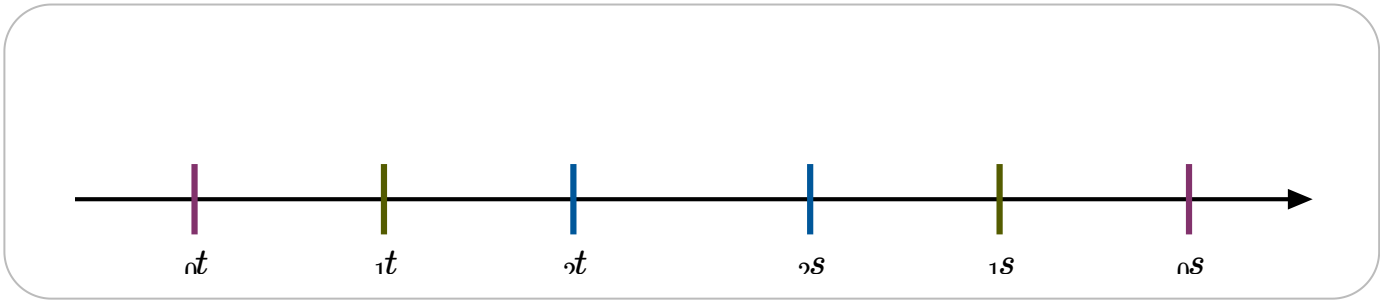
كثيرٌ من المقادير المهمّة لا تُعرف بحسابٍ مباشر: طولٌ، أو مساحةٌ، أو حجمٌ، أو عددٌ كـ $\sqrt{2}$ لا يُكتب كسراً بسطه ومقامه عددان صحيحان، ولا كسراً عشريّاً منتهياً. الطريقة التي يستعملها الكتاب لبلوغها هي الحصر: متتاليةٌ تصعد من تحت المقدار، وأخرى تنزل من فوقه، والمسافة بينهما تضيق حتّى تسعى إلى الصفر. هذا الدرس يقول متى ينجح هذا الحصر، وماذا نربح منه.

الحصر، والشروط الثلاثة

لنفترض أنّ لدينا مقداراً مجهولاً L ، ونعرف عنه أوّلاً أنّه محصورٌ بين عددين معلومين: $t_0 < L < s_0$. في خطوةٍ أولى نُضيّق الحصر فنحصل على $t_0 < t_1 < L < s_1 < s_0$ ، وبعد n خطوة نصل إلى سلسلةٍ أطول.

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n < L < s_n < \cdots < s_1 < s_0$$

انظر ماذا فعلنا من دون أن نسمّيه: المتتالية (t_n) تصعد، والمتتالية (s_n) تنزل، والمجال $[t_n, s_n]$ الذي يحصر L يضيق حتّى يسعى طوله إلى الصفر. هذه الملاحظات الثلاث هي التعريف الذي يأتي بعد قليل.



المجالات $[t_0, s_0]$ ، $[t_1, s_1]$ ، $[t_2, s_2]$ ، ... متداخلة، وأطوالها تسعى إلى الصفر.

تعريف 5

نقول إنّ المتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان، إذا وفقط إذا تحقّقت الشروط الثلاثة معاً. الأوّل: $t_{n+1}\geq t_n$ إحداهما متزايدة، ولنسمّها (t_n) .

والثاني: الأخرى متناقصة. $s_{n+1}\leq s_n$

والثالث: متتالية الفرق متقاربة من الصفر. التعريف لا يذكر ترتيب t_n و s_n ، ولا يفرض $\lim_{n\to+\infty}(s_n-t_n)=0$ الاطّراد التامّ.

الكتاب، الصفحة 115

انتبه: الشروط الثلاثة تُقرأ معاً، لا اثنان منها. $t_n=-n$ و $s_n=n$ متعاكستان في الاطّراد، لكنّ فرقهما $2n$ يكبر بلا حدّ، فليستا متجاورتين. وبالمقابل $t_n=n$ و $s_n=n+\dfrac{1}{n}$ فرقهما يسعى إلى الصفر، لكنّهما تصعدان معاً ولا تتقارب أيٌّ منهما.

تذكّر: التعريف يقول «إحداهما ... والأخرى»، ولا يعيّن أيّهما الصاعدة. تحقّق بالحساب قبل أن ترتّب الفرق، وإلّا انقلبت عليك الإشارة.

المتتاليتان $t_n=\dfrac{n}{n+1}$ و $s_n=\dfrac{n+1}{n}$ معرّفتان من أيّ دليل؟

كيف أبدأ؟ المتتاليتان تُستعملان معاً، فالدليل المقبول هو ما تكون عنده الاثنتان معرَّفتين. افحص المقامين واحداً واحداً، واسأل: هل ينعدم أحدهما عند عددٍ طبيعيّ؟

أ) $n\geq 1$

ب) $n\geq 0$

أ. نعم. عند $n=0$ يصير مقام s_n صفراً، فالدليل الأصغر المقبول هو 1 . هذا مثال الكتاب نفسه بعد التعريف مباشرة.

المبرهنة، وما تعطيه وما لا تعطيه

مبرهنة 9

نتأمّل متتاليتين متجاورتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$. عندئذ تكون المتتاليتان متقاربتين، أي إنّ $\lim_{n\to+\infty}t_n=\ell\in\mathbb{R}$ لكلٍّ منهما نهايةً حقيقيّة.

ويكون لهما النهاية نفسها، لا نهايتان مختلفتان. $\lim_{n\to+\infty}s_n=\ell$

الكتاب، الصفحة 115

المبرهنة لا تطلب شيئاً غير التعريف: لا محدوديّة، ولا $t_n \le s_n$. الاثنان يخرجان من البرهان نفسه نتيجةً، لا شرطاً.

برهان مبرهنة 9، كما في الكتاب. المطلوب: انطلاقاً من الشروط الثلاثة، أثبت التقارب والاشتراك في النهاية.

$$(t_n)\nearrow,\ (s_n)\searrow,\ \lim(s_n - t_n) = 0$$

1. الفرق متناقص لنفترض (t_n) متزايدة و (s_n) متناقصة. عندئذ $(-t_n)$ متناقصة أيضاً، ومجموع متناقصتين متناقص، فالمتتالية $(s_n - t_n)$ متناقصة.

2. ومنه ترتيب الحدّين متتالية متناقصة تسعى إلى الصفر تقترب منه من فوق، فكلّ حدودها موجبة. لو كان حدٌّ منها سالباً لبقي كلّ ما بعده لا يزيد عنه، ولنزلت النهاية تحت الصفر. إذاً $s_n \ge t_n$ لكلّ n .

3. سلسلة الحصر من الاطّراد ومن الترتيب الذي حصلنا عليه: $t_0 \le t_n \le s_n \le s_0$ لكلّ n . إذاً (t_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ s_0 ، و (s_n) متناقصة ومحدودة من الأدنى بـ t_0 . كلتاهما متقاربة بمبرهنة 8.

4. والنهايتان واحدة لتكن $\ell = \lim t_n$ و $\ell' = \lim s_n$. العمليات على النهايات تعطي $\lim(s_n - t_n) = \ell' - \ell$ ، وهذا الطرف صفرٌ بالشرط الثالث.

$$\ell' - \ell = 0 \implies \ell = \ell'$$

الشروط الثلاثة تعمل معاً، ولا تنقسم إلى قسمين. خذ المتتاليتين $-n$ و n من التحذير أعلاه: إحداهما صاعدة والأخرى نازلة، ولا تتقارب أيٌّ منهما. وفي ترتيب البرهان، حيث (t_n) هي المتزايدة: الاطّرادان يجعلان الفرق متناقصاً، والشرط الثالث يسوقه إلى الصفر، فيخرج $s_n \ge t_n$ ؛ ومعه الاطّرادان يعطيان $t_0 \le t_n \le s_n \le s_0$ ، ومنها التقارب بمبرهنة 8. ثمّ الشرط الثالث نفسه يجعل للمتتاليتين النهاية نفسها.

$$\lim t_n = \lim s_n = \ell$$

تذكّر: لا تكتب $t_n \le s_n$ لأنّ الرمزين يوحيان بذلك. التعريف لا يذكره، والبرهان يستخرجه في خطوته الثانية.

انتبه: المبرهنة تضمن وجود النهاية المشتركة، ولا تعطي قيمتها. من $t_n \le \ell \le s_n$ وحدها لا يخرج عدد.

في البرهان، من أين جاء أنّ $s_n \geq t_n$ ؟

> **كيف أبدأ؟** عُد إلى البرهان واقرأه بترتيبه لا بنتيجته: عند الخطوة التي ظهر فيها الترتيب، ما المعطيات التي كانت بين يديك فعلاً؟ ما لم يكن قد أُثبت بعد لا يصلح مبرّراً.

أ) من كون $(s_n - t_n)$ متناقصة وتسعى إلى الصفر

ب) من التعريف، فهو يفرض أنّ t_n تحت s_n

ج) من كون المتتاليتين محدودتين

أ. نعم، وهذه الخطوة هي الوحيدة غير البديهيّة في البرهان: متناقصةٌ نهايتها صفر تقترب من فوق، فحدودها موجبة.

دراسة متتاليتين متجاورتين

متتاليتان معرّفتان تدريجياً: $t_0 = 1$ و $s_0 = 12$ ، ولكلّ n :

$$t_{n+1} = \frac{t_n + 2s_n}{3}$$

$$s_{n+1} = \frac{t_n + 3s_n}{4}$$

مثال الكتاب، بعنوان «دراسة متتاليتين متجاورتين». المطلوب: أثبت التجاور، ثمّ احسب النهاية المشتركة.

$$t_0 = 1,\ s_0 = 12$$

1. الفرق متتالية هندسيّة نضع $h_n = s_n - t_n$. عندئذ $h_{n+1} = \frac{3t_n + 9s_n}{12} - \frac{4t_n + 8s_n}{12} = \frac{1}{12}(s_n - t_n) = \frac{1}{12}h_n$. إذاً (h_n) هندسيّة أساسها $\frac{1}{12}$ ، وبما أنّ $-1 < \frac{1}{12} < 1$ فهي متقاربة من الصفر. ومن $h_0 = 11 > 0$ نستنتج $s_n - t_n > 0$ لكلّ n .

2. الاطّراد $t_{n+1} - t_n = \frac{t_n + 2s_n}{3} - \frac{3t_n}{3} = \frac{2}{3}(s_n - t_n) > 0$ ، فـ (t_n) متزايدة تماماً. و $s_{n+1} - s_n = \frac{t_n + 3s_n}{4} - \frac{4s_n}{4} = -\frac{1}{4}(s_n - t_n) < 0$ ، فـ (s_n) متناقصة تماماً. مع الشرط الثالث من الخطوة السابقة: المتتاليتان متجاورتان، ولهما نهايةٌ مشتركة ℓ .

3. تركيبٌ ثابت يمسك القيمة نضع $u_n = 3t_n + 8s_n$. بالحساب $u_{n+1} - u_n = 0$ لكلّ n ، فـ (u_n) ثابتة، وقيمتها $u_0 = 3(1) + 8(12) = 99$.

4. ومن الثابت تخرج النهاية المتتاليات الثلاث متقاربة، فتنطبق العمليات على النهايات.

$$99 = 3\ell + 8\ell = 11\ell \implies \ell = 9$$

المبرهنة أعطت وجود النهاية، والتركيب الثابت أعطى قيمتها. من دون التركيب تبقى ℓ مجهولةً محصورة بين 1 و 12 .

$$\ell = 9$$

انتبه: النهاية المشتركة ليست وسط الحدّين الأوّلين. هنا $\dfrac{t_0 + s_0}{2} = \dfrac{13}{2}$ ، والنهاية 9 . الوزنان في $3t_n + 8s_n$ غير متساويين، ولذلك تقع النهاية أقرب إلى s_0 .

لماذا احتاج الحلّ إلى المتتالية $u_n = 3t_n + 8s_n$ ؟

كيف أبدأ؟ في نصّ المطلوب أمران لا أمرٌ واحد. حدِّد عند أيّ خطوةٍ من الخطوات الأربع انتهى الأوّل، ثمّ قابل الأمر الثاني بما تنصّ عليه مبرهنة 9 حرفيّاً.

أ) لإثبات أنّ المتتاليتين متجاورتان
ب) لأنّ المبرهنة تعطي وجود النهاية ولا تعطي قيمتها
ج) لأنّ (t_n) و (s_n) غير متقاربتين وحدهما

ب. نعم. مبرهنة 9 تضمن أنّ النهاية موجودة ومشتركة. القيمة 9 تحتاج معلومةً إضافيّة، وهي هنا ثبات التركيب.

كيف نحصر $\sqrt{2}$ بمتتاليتين متجاورتين

التابع $x \mapsto x^2$ متزايدٌ تماماً على $[0, +\infty[$ ، وهذا وحده يكفي لحصر $\sqrt{2}$ بخطواتٍ متتالية، كلٌّ منها تنصّف المجال السابق.

خوارزميّة التنصيف، كما في «تكريساً للفهم». المطلوب: احصر $\sqrt{2}$ بمجالاتٍ متداخلة.

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

1. البداية من $1 < 2 < 4$ نستنتج $1 < \sqrt{2} < 2$. نضع $x_0 = 1$ و $y_0 = 2$.

2. الخطوة الأولى منتصف $[x_0, y_0]$ هو $m = \dfrac{3}{2}$ ، ومربّعه $\dfrac{9}{4} > 2$ ، فـ $\sqrt{2}$ في $[x_0, m]$. نضع $x_1 = x_0 = 1$ و $y_1 = \dfrac{3}{2}$.

3. الخطوة n ليكن m منتصف $[x_{n-1}, y_{n-1}]$. إذا كان $m^2 \geq 2$ نأخذ $[x_n, y_n] = [x_{n-1}, m]$ ، وإلّا نأخذ $[x_n, y_n] = [m, y_{n-1}]$. في الحالتين ينتصف الطول.

4. طول المجال في كلّ خطوة إمّا يبقى $x_n = x_{n-1}$ وإمّا يصير المنتصف، وهو أكبر؛ فـ (x_n) متزايدة بالمعنى الواسع، وبالمثل (y_n) متناقصة بالمعنى الواسع. والطول يُنصَّف في كلّ خطوة، والطول الابتدائي واحد، فالفرق يسعى إلى الصفر. اجتمعت الشروط الثلاثة، فالمتتاليتان متجاورتان، ونهايتهما المشتركة $\sqrt{2}$.

$$y_n - x_n = \frac{1}{2}(y_{n-1} - x_{n-1}) = \frac{1}{2^n}$$

الخوارزميّة لا تحسب $\sqrt{2}$ ، بل تحصره. وكلّ خطوةٍ تنصّف المسافة، فالدقّة تتضاعف بخطوةٍ واحدة.

$$\lim x_n = \lim y_n = \sqrt{2}$$

n	x_n	y_n	$y_n - x_n$
0	1	2	1
1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{11}{8}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{8}$
4	$\frac{11}{8}$	$\frac{23}{16}$	$\frac{1}{16}$
5	$\frac{45}{32}$	$\frac{23}{16}$	$\frac{1}{32}$
6	$\frac{45}{32}$	$\frac{91}{64}$	$\frac{1}{64}$
7	$\frac{181}{128}$	$\frac{91}{64}$	$\frac{1}{128}$
8	$\frac{181}{128}$	$\frac{363}{256}$	$\frac{1}{256}$
9	$\frac{181}{128}$	$\frac{725}{512}$	$\frac{1}{512}$
10	$\frac{181}{128}$	$\frac{1449}{1024}$	$\frac{1}{1024}$
11	$\frac{181}{128}$	$\frac{2897}{2048}$	$\frac{1}{2048}$

أحد عشر تنصيفاً. لاحظ أنّ \(x_n\) لا يتغيّر من \(n = 7\) إلى \(n = 11\).

تذكّر: في كلّ خطوة يتغيّر حدٌّ واحد فقط، والآخر يُنقل كما هو. لذلك المتتاليتان متزايدة ومتناقصة بالمعنى الواسع، لا تماماً.

$$\frac{181}{128} < \sqrt{2} < \frac{2897}{2048}$$

كم خطوةً تلزم حتّى يصير طول المجال أصغر من $\frac{1}{1000}$ ؟

> **كيف أبدأ؟** ابدأ من الصيغة التي أعطاها البرهان لطول المجال عند الدليل n ، واكتب المتراجحة التي يطلبها السؤال. ثمّ اسأل قبل الحساب: هل يصغر الطول خطّيّاً مع n أم يُنصَّف في كلّ خطوة؟

أ) $n = 1000$

ب) $n = 9$

ج) $n = 10$

ج. نعم. الطول $\frac{1}{2^n}$ ، و $2^{10} = 1024 > 1000$ بينما $2^9 = 512 < 1000$.

المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 115 إلى 118 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.