الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

عموميّات عن المتتاليات

تابعٌ لا يقبل إلّا الأعداد الطبيعيّة، وثلاث أدوات تكشف إلى أين يمضي

تذكرة بالمتتاليات، والإثبات بالتدريج . الوحدة 1 . الدرس 1

بسيطة

المتتالية ليست شيئاً جديداً، إنّها تابعٌ ضُيِّقت مجموعة تعريفه حتّى لم يبقَ فيها إلّا الأعداد الطبيعيّة. وهذا التضييق وحده يغيّر كلّ الأسئلة: لم يعد يُسأل عن نهاية عند نقطة، بل عن الاتّجاه، وعن الحدّ الذي يلي، وعن مجموع حدودٍ كثيرة دفعةً واحدة. هذا الدرس يعيد بناء الأدوات كلّها، وفيه مفارقةٌ ينبغي أن تنتبه لها من الآن: كلّ الصيغ التي ستأخذها هنا صحيحة، ولن نبرهن ولا واحدةً منها برهاناً يشمل كلّ n . الأداة التي تفعل ذلك تأتي في الدرس التالي.

ما هي المتتالية

خذ تابعاً وامنع عنه كلّ عددٍ ليس طبيعيّاً. ما يبقى هو متتالية. لهذا لا نكتب $f(n)$ بل u_n ، ولا نقول «قيمة التابع عند n » بل «الحدّ ذو الدليل n ». الرمز تغيّر، والفكرة هي هي.

تعريف المتتالية

المتتاليةُ هي تابعٌ مجموعة تعريفه هي مجموعة الأعداد الطبيعيّة $\mathbb{N}$ ، أو أيّة مجموعة جزئيّة غير منتهية منها من النمط $\{n_0,\ n_0+1,\ n_0+2,\ \ldots\}$ حيث n_0 عددٌ طبيعيّ معطى. ونسمّي u_n حدَّ المتتالية ذا الدليل n . $(u_n)_{n\geq 0}$ $(u_n)_{n\geq n_0}$

الكتاب، الصفحة 7

لاحظ الجملة الثانية في التعريف: مجموعة التعريف قد تبدأ من n_0 لا من الصفر، و n_0 يتغيّر من متتالية إلى أخرى. الكتاب يعطي مثالين في السطر نفسه: $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ تبدأ من $n_0=1$ ، و $\left(\dfrac{1}{n^2-1}\right)$ تبدأ من $n_0=2$. في الحالتين ليس الاختيار ذوقاً، بل ضرورة: عند الدليل السابق يصير المقام صفراً.

انتبه: لا تكتب $(u_n)_{n\geq 0}$ بحكم العادة. الدليل الابتدائيّ جزءٌ من المتتالية نفسها، وكتابته خطأً تعني أنّك تدّعي وجود حدٍّ غير موجود. اسأل أوّلاً: عند أيّ دليلٍ يصير التعبير معرَّفاً؟

وثمّة تمييزٌ يقيم الكتاب عليه سطراً كاملاً: للمتتالية عددٌ لا نهائيٌّ من الحدود بقطع النظر عن قيم هذه الحدود. عدد الحدود شيء، وعدد القيم التي تظهر شيء آخر تماماً.

$$u_n = (-1)^n$$
$$u_0 = 1, \quad u_1 = -1$$
$$u_2 = 1, \quad u_3 = -1, \quad \ldots$$

تذكّر: هذه المتتالية لها قيمتان اثنتان، ولها عددٌ لا نهائيّ من الحدود. من قال «متتالية ذات حدّين» فقد خلط بين القيمة والحدّ.

ما أصغر دليلٍ ابتدائيّ n_0 يجعل المتتالية ذات الحدّ العامّ $u_n = \dfrac{2n}{n^2 - 9}$ معرَّفةً عنده وعند كلّ ما يليه؟

كيف أبدأ؟ ابحث أوّلاً عن العدد الطبيعيّ الذي ينعدم عنده المقام، ثمّ اسأل: من أيّ دليلٍ فصاعداً لا يعود المقام ينعدم عند أيّ حدٍّ تالٍ؟

أ) $n_0 = 4$
ب) $n_0 = 0$
ج) $n_0 = 3$

أ. نعم. المقام ينعدم عند $n = 3$ ، فأصغر دليلٍ طبيعيّ صالحٍ بعده هو 4 ، ومن 4 فصاعداً لا ينعدم المقام أبداً.

طريقتان لإعطاء متتالية

الكتاب يذكر طريقتين، لا ثالثة لهما. الأولى تعطيك الحدّ مباشرةً بدلالة دليله، والثانية تعطيك حدّاً واحداً وقاعدةً للانتقال.

الطريقتان

$u_n = f(n)$ بتعريفٍ صريحٍ للحدّ ذي الدليل n : يُعرَّف الحدُّ بصيغةٍ تتبع العدد n تفيد في حسابه. مثال الكتاب $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$. وهنا يمكن حساب u_{100} من دون معرفة ما قبله.

$u_0 \in D, \quad u_{n+1} = f(u_n)$ بالتدريج: يُحسب الحدُّ ذو الدليل n بدلالة الحدود التي سبقته. يُعطى u_0 ، ثمّ علاقةٌ تسمّى علاقةً تدريجيّة. وهنا لا يُحسب u_{100} مباشرةً، بل بعد الحدود المئة التي تسبقه، ما لم نجد للمتتالية صيغةً صريحة.

الكتاب، الصفحة 7

المثال الأوّل في الكتاب، وهو أقصر من أن يُشرح، لكنّه يقود مباشرةً إلى الشرط الذي يليه. المطلوب: احسب الحدود الأولى للمتتالية المعرَّفة تدريجيّاً.

$$u_0 = 3, \qquad u_{n+1} = u_n^2 - 2$$

1. حدٌّ واحدٌ إثر آخر لا مفرّ من الترتيب. كلّ حدٍّ يحتاج سابقه، فنبدأ من $u_0 = 3$ ونصعد.

$$u_1 = 3^2 - 2 = 7$$
$$u_2 = 7^2 - 2 = 47$$
$$u_3 = 47^2 - 2 = 2207$$

2. ما الذي يتكرّر في السطر في كلّ سطرٍ نطبّق العمليّة نفسها على الحدّ السابق. هذه العمليّة تابعٌ، سمِّه f ، وعندئذٍ تُكتب العلاقة التدريجيّة كلّها في رمزٍ واحد.

$$f : x \mapsto x^2 - 2, \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

3. والسؤال الذي يفتحه هذا الرمز إذا كان $u_{n+1} = f(u_n)$ ، فالحدّ الجديد هو صورة الحدّ القديم. ولكي يبقى ذلك ممكناً إلى ما لا نهاية، يجب أن تقع الصورة دائماً حيث يقبلها f مرّةً أخرى. هذا هو شرط الكتاب في الفقرة التالية.

$$u_0 \longrightarrow u_1 \longrightarrow u_2 \longrightarrow \cdots$$

المتتالية المعرَّفة بالتدريج لا تعطي حدّاً بعيداً مباشرةً: إمّا أن تمرّ بكلّ ما قبله، وإمّا أن تجد لها صيغةً صريحة. من طُلب منه u_{50} يبحث عن الصيغة الصريحة أوّلاً.

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

بوجه عام

إذا كان $\forall x \in D : f(x) \in D$ تابعاً معرّفاً على المجموعة D ، وتحقّق الشرط «مهما يكن العدد x من D يكن $f(x)$ عنصراً من D أيضاً»، أمكننا تعريف متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ بإعطاء حدّ البدء u_0 من D والعلاقة التدريجيّة $u_{n+1} = f(u_n)$.

الكتاب، الصفحة 7

انتبه: من دون هذا الشرط قد تتوقّف المتتالية بعد خطوتين. خذ $f : x \mapsto \sqrt{x-5}$ على $[5, +\infty[$ وابدأ من $u_0 = 9$: يكون $u_1 = 2$ ، وهو خارج المجال، فلا معنى لـ u_2 أصلاً. اكتب الشرط قبل أن تكتب الحدود.

المتتالية معرَّفة بـ $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2}$. أيّ العبارات الآتية صحيحة؟

كيف أبدأ؟ عُد إلى شرط الكتاب في التعريف التدريجيّ، وحدّد ما الذي يجب أن يبقى داخل D . ثمّ افحص كلّ عبارةٍ بهذا الشرط وحده، لا بما تبدو عليه الحدود.

أ) التعريف غير سليم، لأنّ الحدود تصير سالبةً بعد عددٍ من الخطوات

ب) التعريف سليمٌ فقط إذا كان f متزايداً على D

ج) الشرط « $f(x)$ من D » متحقّق هنا، لأنّ نصف عددٍ موجبٍ عددٌ موجب

ج. نعم. مع $f : x \mapsto \dfrac{x}{2}$ و $D =]0, +\infty[$ تبقى كلّ صورةٍ داخل D ، فالتعريف التدريجيّ سليمٌ إلى ما لا نهاية.

جهة الاطراد، وثلاث أدوات

السؤال الأوّل عن أيّ متتالية هو: إلى أين تمضي؟ والجواب الأوّل ليس نهايةً بل اتّجاهاً. الكتاب يفصّل خمس حالات، لا اثنتين.

تعريف 1

$u_n < u_{n+1}$ متزايدة تماماً، إذا وفقط إذا تحقّق الشرط مهما تكن $n \geq n_0$.

$u_n > u_{n+1}$ متناقصة تماماً.

$u_n \leq u_{n+1}$ متزايدة. لاحظ المساواة: حدّان متساويان لا يفسدان التزايد غير التامّ.

$u_n \geq u_{n+1}$ متناقصة.

$u_n = u_{n+1}$ ثابتة. وهي متزايدة ومتناقصة في آنٍ معاً، ولا واحدة منهما تماماً.

الكتاب، الصفحة 8

تذكّر: المتتاليات التي تحقّق إحدى هذه الحالات تسمّى متتاليات مطّردة. وتوجد متتاليات غير مطّردة، والكتاب يعطي المثال في السطر نفسه: $u_n = (-1)^n$ لا تتزايد ولا تتناقص.

ثلاث أدوات لدراسة الاطراد

$u_{n+1} - u_n$ ادرس إشارة الفرق. موجبٌ تماماً يعني تزايداً تامّاً. تصلح دائماً.

$f'(x)$ اكتب $u_n = f(n)$ إن أمكن، ثمّ ادرس اطّراد التابع f . فإذا كان f مطّرداً على المجال $[n_0, +\infty[$ كانت جهة اطّراد $(u_n)_{n \geq n_0}$ هي نفسها.

1 قارن النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ بالواحد. لا تصلح إلّا إذا كانت حدود المتتالية موجبةً تماماً، والكتاب يذكر الشرط في السطر نفسه.

الكتاب، الصفحة 10

الأداة الأولى، وهي التي لا تشترط شيئاً. المطلوب: ادرس اطّراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

$$u_n = \frac{n^2+1}{2n}$$

1. اطرح الحدّين نكتب الحدّ التالي بوضع $n+1$ مكان n ، ثمّ نطرح. المقام المشترك هو $2n(n+1)$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{(n+1)^2+1}{2(n+1)} \\ &\quad - \frac{n^2+1}{2n} \\ &= \frac{n^2+n-1}{2n(n+1)} \end{aligned}$$

2. المقام لا يقرّر شيئاً عند $n \geq 1$ يكون $2n(n+1)$ موجباً تماماً، فإشارة الفرق كلّه هي إشارة البسط وحده. هذه هي الخطوة التي تختصر العمل.

$$2n(n+1) > 0 \quad , \quad n \geq 1$$

3. إشارة البسط لا حاجة إلى حلّ المعادلة من الدرجة الثانية. من $n \geq 1$ يأتي $n-1 \geq 0$ و $n^2 > 0$ ، ومجموع موجبٍ تماماً وموجبٍ هو موجبٌ تماماً.

$$n^2+n-1 = n^2 + (n-1) > 0, \quad n \geq 1$$

المتتالية متزايدة تماماً على $n \geq 1$. ولاحظ الطريق: لم نحسب أيّ حدّ، ولم نجرّب أيّ قيمة. إشارة الفرق وحدها تكفي.

$$u_{n+1} - u_n > 0$$

الأداة الثانية، وفيها الفخّ الوحيد في هذا المقطع. المطلوب: ادرس اطّراد المتتالية المعرَّفة على $\mathbb{N}$.

$$v_n = (n-1)^2$$

1. من المتتالية إلى التابع نضع $f(x) = (x-1)^2$ على $\mathbb{R}$ ، فيكون $v_n = f(n)$. ثمّ نشتقّ.

$$f'(x) = 2(x-1)$$

2. أين يتزايد التابع المشتقّ موجبٌ تماماً عند $x > 1$ فقط. إذن f متزايدٌ تماماً على $]1, +\infty[$ ، ولا شيء أكثر من ذلك.

$$f'(x) > 0 \iff x > 1$$

3. الفخّ: من أيّ دليلٍ ننقل النتيجة الأداة تنقل اطّراد f إلى المتتالية على المجال الذي ثبت عليه، لا على غيره. الكتاب يكتب لهذا السبب $(v_n)_{n\geq 1}$ وليس $(v_n)_{n\geq 0}$. والفرق ليس شكليّاً: عند الدليل صفر تكذب النتيجة.

$$v_0 = (0-1)^2 = 1 > v_1 = (1-1)^2 = 0$$

$(v_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً. أمّا $(v_n)_{n\geq 0}$ فليست مطّردة، لأنّ حدَّيها الأوّلين ينزلان قبل أن تصعد. الدليل الابتدائيّ في الجواب هو نصف الجواب.

$$n \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad v_{n+1} > v_n$$

الأداة الثالثة، وهي الأسرع حين تصلح. المطلوب: ادرس اطّراد المتتالية المعرَّفة على $\mathbb{N}$.

$$w_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

1. تحقّق من الشرط قبل الأداة قوّةٌ موجبةٌ لعددٍ موجبٍ تماماً هي عددٌ موجبٌ تماماً، إذن $w_n > 0$ مهما تكن n . الآن فقط يجوز القسمة على w_n .

$$w_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0$$

2. النسبة القوى تختصر كلّها، ولا يبقى إلّا الأساس. وهذه علامة المتتالية الهندسيّة، وسنعود إليها في المقطع التالي.

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{2}{3}$$

3. المقارنة بالواحد النسبة أصغر من الواحد، وحدود المتتالية موجبةٌ تماماً، فالضرب بـ w_n يحفظ جهة المتراجحة.

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} < 1 \quad \Longrightarrow \quad w_{n+1} < w_n$$

المتتالية متناقصة تماماً. والخطوة الأخيرة هي موضع الشرط كلّه: لو كان w_n سالباً لانقلبت جهة المتراجحة عند الضرب، ولخرج الجواب معكوساً.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, \quad u_n > 0 \quad \Longrightarrow \quad u_{n+1} < u_n$$

انتبه: أكثر ما يُخطأ فيه هنا شيئان. الأوّل: استعمال أداة النسبة من دون التحقّق من أنّ الحدود موجبةٌ تماماً. الثاني: قراءة إشارة u_n بدل إشارة $u_{n+1} - u_n$. متتاليةٌ كلّ حدودها سالبة يمكن أن تكون متزايدةً تماماً، مثل $u_n = -\dfrac{1}{n}$.

المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرَّفة بـ $u_n = \dfrac{n}{10^n}$. أيّ أداةٍ تعطي الجواب بأقلّ عمل، ولماذا؟

> **كيف أبدأ؟** الأدوات الثلاث صالحة هنا، والسؤال عن الكلفة لا عن الصلاحية. اكتب في ذهنك أوّل سطرٍ من كلّ أداةٍ وقارن: أيّها يصل إلى تعبيرٍ تظهر إشارته من دون توحيد مقامٍ ولا اشتقاق؟ وتذكّر أنّ إحدى الأدوات تشترط إشارة الحدود، ففحص الشرط جزءٌ من الجواب.

أ) أداة الفرق، لأنّ الشرط الوحيد فيها هو ألّا يكون هناك شرط

ب) أداة النسبة، بعد التحقّق من أنّ الحدود موجبةٌ تماماً عند $n \geq 1$

ج) أداة المشتقّ، لأنّ الحدّ العامّ مكتوبٌ بدلالة n وحده

ب. نعم. الحدود موجبة عند $n \geq 1$ ، والنسبة $\dfrac{n+1}{10n}$ تُقارَن بالواحد مباشرة: هي أصغر منه عند $n \geq 1$ ، فالمتتالية متناقصة تماماً هناك. وانتبه إلى $u_0 = 0$ ، فالحدّ الأوّل يخرج عن شرط الأداة.

المتتالية الحسابيّة والمتتالية الهندسيّة

متتاليتان بالذات لهما اسمٌ خاصّ، لأنّ الانتقال من حدٍّ إلى تاليه فيهما يجري بالعمليّة نفسها في كلّ خطوة: جمعٌ في الأولى، ضربٌ في الثانية.

تعريف 2

$u_{n+1} = u_n + r$ متتالية حسابيّة إذا وُجِدَ عددٌ حقيقيّ r وتحقّقت العلاقة أيّاً كان n . نسمّي r أساس المتتالية الحسابيّة.

الكتاب، الصفحة 8

الصيغ المرافقة للمتتالية الحسابيّة

$u_m = u_p + (m-p)\,r$ صيغة القفز بين دليلين كيفما كانا. لاحظ أنّها لا تفترض أنّ المتتالية تبدأ من الصفر، بل تربط أيّ دليلين.

إذا كان S مجموعَ n حدّاً متتالياً أوّلها a وآخرها ℓ . وبوجهٍ خاصّ $S = \frac{n\,(a+\ell)}{2}$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

الكتاب، الصفحة 9

انتبه: في صيغة المجموع n هو عدد الحدود، لا دليل الحدّ الأخير. في $u_{25} + u_{26} + \cdots + u_{125}$ عدد الحدود هو $125 - 25 + 1 = 101$ ، لا 125 ولا 100 . عُدَّ الحدود قبل أن تكتب الصيغة.

تعريف 3 والصيغ المرافقة

متتالية هندسيّة إذا وُجِدَ عددٌ حقيقيّ q وتحقّقت العلاقة أيّاً كان n . نسمّي q أساس المتتالية الهندسيّة. $u_{n+1} = q \times u_n$

صيغة القفز، وهي مبنيّة على الضرب لا على الجمع. $u_m = u_p \, q^{m-p}$

مجموع n حدّاً متتالياً أوّلها a . الشرط $q \neq 1$ مكتوبٌ في الكتاب نفسه. وبوجهٍ خاصّ $S = a \frac{1-q^n}{1-q}$ $(q \neq 1)$

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} \, .$$

الكتاب، الصفحة 9

انتبه: الشرط $q \neq 1$ ليس زينة. عند $q = 1$ يصير المقام $1 - 1 = 0$ ، والصيغة بلا معنى. والجواب في هذه الحالة أبسط من الصيغة: كلّ الحدود تساوي a ، فالمجموع هو $n \times a$.

تمرينٌ من الكتاب نفسه (ص 11)، وفيه يجتمع الخطآن الشائعان. المتتالية حسابيّة، $r = -2$ و $u_0 = -3$. المطلوب:

$$S = u_{25} + u_{26} + \cdots + u_{125}$$

1. عُدَّ الحدود أوّلاً من الدليل 25 إلى الدليل 125 شاملين الطرفين. الفرق وحده يعطي 100 ، وهو خطأ الواحد المعروف.

$$n = 125 - 25 + 1 = 101$$

2. الطرفان نستعمل صيغة القفز مرّتين، انطلاقاً من الدليل الذي نعرفه فعلاً، وهو 0 .

$$a = u_{25} = -3 + 25 \times (-2) = -53$$
$$\ell = u_{125} = -3 + 125 \times (-2) = -253$$

3. الصيغة الآن فقط نضع في الصيغة، وقد صار كلّ رمزٍ فيها معلوماً.

$$S = \frac{101 \times (-53 + (-253))}{2} = \frac{101 \times (-306)}{2} = -15453$$

ثلاث خطوات، والأولى هي التي تُنسى. عدد الحدود، ثمّ الطرفان، ثمّ الصيغة.

$$n = m - p + 1$$

متتالية هندسيّة أساسها $q = 1$ وحدّها الأوّل $a = 7$. كم يساوي مجموع حدودها العشرة الأولى؟

> **كيف أبدأ؟** قبل أن تفتح صيغة المجموع، اسأل: ما هي حدود هذه المتتالية فعلاً عندما يكون الأساس 1 ؟ اكتب ثلاثةً منها. الصيغة أداةٌ لها شرط، والجمع المباشر لا شرط له.

أ) غير معرَّف، لأنّ المقام $1 - q$ ينعدم

ب) 70

ج) 0

ب. نعم. عند $q = 1$ تكون المتتالية ثابتة، وكلّ حدودها تساوي 7 ، فالمجموع $7 \times 10 = 70$. الشرط $q \neq 1$ يمنع الصيغة، لا الحساب.

من أين تأتي صيغة المجموع الهندسيّ

الكتاب لا يترك صيغة المجموع الهندسيّ بلا مصدر، ولا يبرهنها بالتدريج، لأنّ التدريج لم يأتِ بعد. يستنتجها من مطابقةٍ جبريّة تعرفها من قبل.

مطابقة مفيدة

أي إنّ $x^n - a^n = (x - a)\left(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + a^{n-1}\right)$ هو جداء ضرب $x^n - a^n$ بمجموع جميع $(x - a)$ الأعداد $x^{\alpha}a^{\beta}$ حيث α و β عددان طبيعيّان مجموعهما يساوي $n - 1$.

$x^5 - a^5 = (x - a)\left(x^4 + x^3a + x^2a^2 + xa^3 + a^4\right)$ الحالة الخاصّة التي يطبعها الكتاب. عُدَّ الحدود في القوس الثاني: خمسة، ومجموع الأسّين في كلّ حدٍّ منها أربعة.

الكتاب، الصفحة 9

من المطابقة إلى الصيغة، وهو الاستنتاج الوحيد في الدرس. المطلوب: أثبت صيغة المجموع الهندسيّ انطلاقاً من المطابقة.

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

1. الحالتان الواضحتان أوّلاً إذا كان $x = a$ صار الطرفان صفراً، وإذا كان $x = 0$ صار الطرفان $-a^n$. المطابقة صحيحةٌ في الحالتين، فنستبعدهما ونعمل في ما بقي.

$$x = a, \qquad x = 0$$

2. التعويض الذي يحوّل المطابقة إلى مجموع نضع $q = \dfrac{a}{x}$. كلّ حدٍّ من القوس الثاني، مقسوماً على x^{n-1} ، يصير قوّةً من q ، ويظهر المجموع المطلوب.

$$\frac{x^{\alpha}a^{\beta}}{x^{\,n-1}} = \left(\frac{a}{x}\right)^{\beta} = q^{\beta}, \qquad \alpha+\beta = n-1$$

3. القسمة على المعامل نقسم طرفي المطابقة على $x^{n-1}(x-a)$ ، وهو غير معدومٍ بعد استبعاد الحالتين. الطرف الأيسر يعطي الكسر، والطرف الأيمن يعطي المجموع.

$$1 + \frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \cdots + \frac{a^{n-1}}{x^{n-1}} = \frac{x^n - a^n}{x^{\,n-1}(x-a)}$$

4. الشكل الأخير نقسم بسط الطرف الأيمن ومقامه على x^n ، فيصير كلّ شيءٍ بدلالة q وحده. وهذه هي الصيغة المطلوبة.

$$\frac{x^n - a^n}{x^{\,n-1}(x-a)} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

الصيغة ليست قاعدةً محفوظة، بل مطابقةٌ جبريّةٌ مقسومة. ومن هنا يأتي الشرط $q \neq 1$: هو الشرط $x \neq a$ نفسه، مكتوباً بلغةٍ أخرى.

$$q = \frac{a}{x}, \qquad q \neq 1 \iff x \neq a$$

وهنا ينتهي الدرس، وتبقى ثغرةٌ واحدة مقصودة. كلّ ما أخذناه صحيح، ولم نبرهن جملةً واحدةً تشمل كلّ n برهاناً مباشراً. حتّى المطابقة أعلاه أخذناها كما هي.

انتبه: الكتاب يضع الثغرة أمامك صراحةً في فقرة «فَكِّر» على الصفحة الثامنة: في متتالية $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = u_n^2 - 2$ نجد $u_1 = 7$ و $u_2 = 47$ و $u_3 = 2207$ ، وكلّها تنتهي بالرقم 7 . أصحيحٌ أنّ هذا يبقى إلى ما لا نهاية؟ ثلاث حالاتٍ صحيحة ليست برهاناً. الأداة التي تحسم مثل هذا السؤال هي موضوع الدرس التالي.

المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 7 إلى 11 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.