



الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

تقاطع ثلاثة مستويات

ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل، وعدد حلولها هو شكل التقاطع
المستقيمت والمستويات في الفراغ . الوحدة 3 . الدرس 4

مستويان مختلفان إما أن يتوازيا فلا يلتقيا، وإما أن يتقاطعا في مستقيم، وقد رأيت ذلك في الدرس السابق. فأضف الآن مستوياً ثالثاً وأعد السؤال. إن كان الأولان متوازيين فقد انتهى الأمر قبل أن يبدأ. وإن تقاطعا في مستقيم، فالسؤال كله صار سؤال الدرس السابق مرّة أخرى: مستقيمٌ ومستوي. هذا هو الدرس بالهندسة، وهو خطوتان لا أكثر. وبالجبر هو جملة ثلاث معادلات خطيّة بثلاثة مجاهيل، وعدد حلولها يقول لك أيّ الحالات أنت فيها. والفائدة في النظر إلى الجهتين معاً: الهندسة تنبئك بعدد الحلول قبل أن تحسب، والحساب يعطيك الإحداثيات.

تقاطع ثلاثة مستويات

كلّ ما يأتي يجري في جملة متجانسة $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، يضعها الكتاب في سطرٍ واحد تحت العنوان، ويسمّيها في تدريبات الدرس نفسه «معلماً متجانساً». والاسمان لشيء واحد. وليس في هذا الدرس مبرهنه ولا نتيجة ولا برهان، وهذا غير معتاد في هذا الكتاب: لحمة كلّ نصّ جارٍ، وصندوق صور، وجدول.

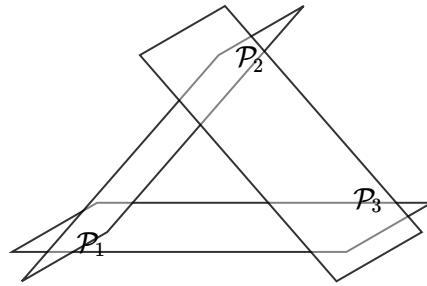
ابدأ بالملاحظة التي يبدأ بها الكتاب. إذا انطبق اثنان من المستويات الثلاثة فالمسألة ليست جديدة، إنَّها تقاطع مستويين وقد دُرست في الفقرة السابقة. ولهذا يفترض الكتاب فيما يأتي أنّ المستويات الثلاثة مختلفة مثنى مثنى. ثم تأتي الفكرة في خطوتين: عيّن $P_1 \cap P_2$ أولاً، ثم اقطع ما خرج بـ P_3 . وإذا كان ما خرج مستقيماً فأنت في الدرس السابق بعينه.

1.4. تقاطع ثلاثة مستويات

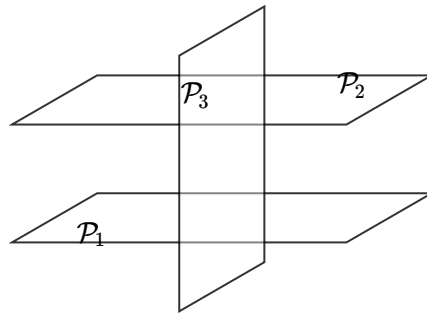
$P_1 \neq P_2, P_2 \neq P_3, P_1 \neq P_3$ هذا هو معنى «مختلفة مثنى مثنى»: لا اثنين منها منطبقان. وهو فرض يضعه الكتاب لبناء هذه الفقرة، لا خاصّةً للمستويات، لأنّ حالة الانطباق تعود إلى الفقرة السابقة.
 $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = (P_1 \cap P_2) \cap P_3$ الخطوتان. عيّن تقاطع الأولين، ثم اقطعه بالثالث. وما دامت المستويات مختلفة مثنى مثنى فليس لـ $P_1 \cap P_2$ إلا حالتان: مستقيمٌ أو مجموعة خالية.

الكتاب، الصفحة 77

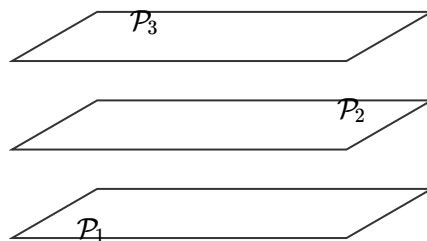
ويعرض الكتاب الحالات في صندوق واحد، ثلاثة عناوين وخمس صور. العنوان الأوّل «لا توجد نقاط مشتركة»، وتحت ثلاث صور، لأنّ انعدام النقطة المشتركة يحدث بثلاث طرقٍ مختلفة.



من الحالة الأولى، لا توجد نقاط مشتركة: كلّ مستويين من الثلاثة يتقاطعان في مستقيم، والمستقيمتان الثلاثة متوازية، فتحيط المستويات بمنشور ولا تشترك في نقطة. وكلّ مستوي منها يوازي الفصل المشترك للآخرين.

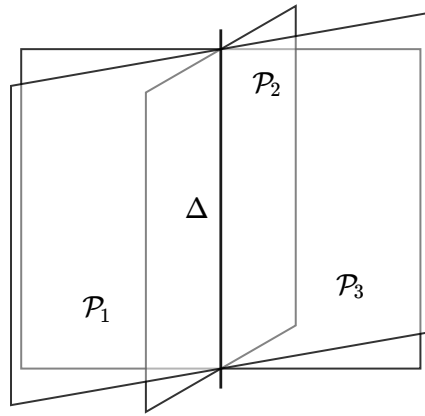


ومنها أيضاً: P_1 و P_2 متوازيان ومختلفان، والثالث يقطعهما في مستقيمين متوازيين. ولا حاجة إلى النظر في الثالث أصلاً: الأولان لا نقطة مشتركة لهما، فالتقاطع الثلاثي خالٍ. والمثال الأول في الفقرة التالية يقع في هذه الحالة نفسها، وإن كان المستويان المتوازيان فيه هما P_1 و P_3 .



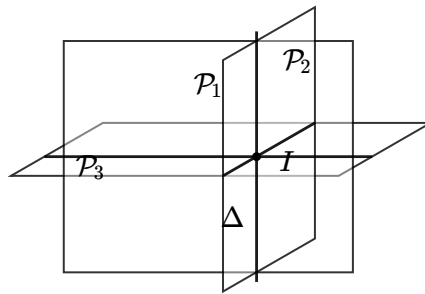
وآخر صور الحالة الأولى: المستويات الثلاثة متوازية ومختلفة مثني مثني، فلا نقطة مشتركة لأيّ اثنين منها، ولا للثلاثة.

والعنوان الثاني «يوجد مستقيم مشترك»، وتحتة صورة واحدة: ثلاثة مستويات تمرّ كلّها بمستقيم واحد، مثل ثلاث صفحات في كتاب مفتوح تشترك في الكعب.



الحالة الثانية، يوجد مستقيم مشترك: المستويات الثلاثة تمرّ كلّها بالمستقيم Δ ، فالتقاطع الثلاثي هو Δ نفسه، وللجملّة عددٌ لا نهائيّ من الحلول تمثّلها نقاطه.

والعنوان الثالث «توجد نقطة وحيدة مشتركة»، وتحتة صورةٌ واحدة أيضاً: هي زاوية غرفة، ثلاثة مستويات تلتقي في نقطةٍ واحدة.



الحالة الثالثة، توجد نقطة وحيدة مشتركة: P_1 و P_2 يتقاطعان في Δ ، و P_3 يقطع Δ في النقطة I . والمستقيمان الآخران المرسومان في P_3 هما فصلاه المشتركان مع الآخرين، وهما يلتقيان في I أيضاً. وهذه أسماء الكتاب نفسها في هذه الصورة.

انتبه: والرمز Δ يظهر في صورتَي الحالتين الثانية والثالثة، وليس هو هو. في «يوجد مستقيم مشترك» هو تقاطع المستويات الثلاثة كلّها. وفي «توجد نقطة وحيدة مشتركة» هو تقاطع مستويين فقط، والمستوي الثالث يقلّصه إلى النقطة I . الرمز واحدٌ والمعنى مختلف، وهذا الفرق هو كلّ الفرق بين الحالتين.

تذكّر: ولذلك فالدرس كلّ خطوتان. عيّن $P_1 \cap P_2$ أولاً. فإن خرج خالياً فالتقاطع الثلاثي خالٍ، وانتهى الأمر بلا نظريّ في P_3 . وإن خرج مستقيماً فأنت أمام مستقيمين ومستوٍ، وحالاته الثلاث معروفة من الدرس السابق: يقطعه في نقطة، أو يوازيه فلا يلقاه، أو يحويه فيبقى المستقيم كلّ مشتركاً.

$P_1 \cap P_2$ مستقيم Δ ، والمستوي P_3 يوازي Δ ولا يحويه. ما هو $P_1 \cap P_2 \cap P_3$ ؟

كيف أبدأ؟ التقاطع الثلاثي هو تقاطع Δ مع P_3 لا أكثر. فارجع إلى الحالات الثلاث لمستقيم ومستوي، وانظر في أيها أنت.

(أ) النقطة التي يقطع فيها P_3 المستقيم Δ

(ب) المستقيم Δ كله

(ج) مجموعة خالية

ج. نعم. P_3 يوازي Δ ولا يحويه، فلا نقطة مشتركة بينهما، فلا نقطة مشتركة بين المستويات الثلاثة. وهذه إحدى صور الحالة الأولى، والفرضية لا تعين أيها: إن قطع P_3 المستويين الآخرين فهي صورة المنشور، وإن وازى أحدهما فهي الصورة الثانية. والجواب واحد في الحالتين.

الترجمة الجبرية للمسألة

لكل مستوي معادلة ديكارتية، ولثلاثة مستويات ثلاث معادلات. ونقطة تنتمي إلى الثلاثة معاً هي بالضبط ثلاثية (x, y, z) تحقق المعادلات الثلاث في وقت واحد. فالسؤال الهندسي صار سؤالاً واحداً في الجبر: حلّ جملة ثلاث معادلات خطية بثلاثة مجاهيل.

2.4. الترجمة الجبرية للمسألة

كل مستوي بمعادلته الديكارتية، والمعاملات تحمل دليل مستويها. والكتاب لا يكتب هنا شرطاً على المعاملات، لكنّه لازم من معنى المعادلة: لكي تمثل مستويًا يجب أن يكون $(a_i, b_i, c_i) \neq (0, 0, 0)$.

ونقطة تنتمي إلى الثلاثة معاً هي بالضبط ثلاثية تحقق السطور الثلاثة معاً. فدراسة التقاطع

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \end{cases}$$

تؤول إلى حلّ هذه الجملة، ويسمّيها الكتاب (S) ، وإحداثيات نقاط التقاطع هي حلولها لا شيء آخر.

الكتاب، الصفحة 77

نلخص فيما يأتي الحالات المختلفة

$P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \emptyset$ لا توجد نقاط مشتركة، ومجموعة حلول (S) خالية. والكتاب يكتب هذه الحالة بالكلمة، «خالية»، ولا يستخدم الرمز في هذه الصفحات.

$P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \{I\}$ نقطة مشتركة واحدة I ، وللجملة حلّ وحيد (x, y, z) ، وهو يمثلّ إحداثيات I .

$P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \Delta$ مستقيم Δ ، ويقول الجدول صراحةً إنّهُ معرّفُ باثنتين من المعادلات الثلاث، وحلول الجملة هي كلّ الثلاثيات التي تحقّق تلك المعادلتين.

$P_1 = P_2 = P_3$ المستويات الثلاثة مستوي واحد، والتقاطع هو ذلك المستوي، وحلول الجملة هي كلّ الثلاثيات التي تحقّق إحدى المعادلات.

الكتاب، الصفحة 78

انتبه: والكتاب يعرض الحالات مرتين وبترتيبين مختلفين، وهنا مصيدة. صندوق الصور صفحة 77 يرتبها: لا نقاط مشتركة، ثم مستقيم مشترك، ثم نقطة وحيدة. والجدول صفحة 78 يرتبها: لا نقاط مشتركة، ثم نقطة، ثم مستقيم، ثم مستوي. فالثانية في الصندوق هي الثالثة في الجدول والعكس. ومن قرأ الجدول بوصفه تسميةً لصور الصندوق بحسب الموضع نسب كل حالة إلى غيرها. اقرأ النص، ولا تعتمد على الترتيب.

انتبه: وفي الجدول سطر رابع لا صورة له في الصندوق: $P_1 = P_2 = P_3$. وهو يناقض فرض الفقرة السابقة نفسها، «مختلفة مثنى مثنى»، والكتاب لا يقول إنه رفع الفرض. والتوفيق بينهما بسيط: الفرض شرط لبناء الفقرة الأولى وترتيب صورها، والجدول يصنف كل الحالات بلا فرض. وعملياً هذا يعني خطوة أولى في كل مسألة: انظر أولاً هل معادلتان من الثلاث تصفان المستوي نفسه.

ويضع الكتاب هنا سؤالاً تحت عنوان «تكريساً للفهم»: هل يفيد التفسير الهندسي في حل بعض جمل المعادلات؟ وجوابه نعم، فهو يتيح معرفة سابقة بعدد حلول الجملة، وذلك يجعل التحقق من صحة الحل الجبري يسيراً. والمثال الأول الآتي هو الدليل: ينتهي قبل أن يبدأ الحذف، لأن الأشعة النازمة دلت على الطريق ثم حسمته مقارنة حد ثابت واحد.

تذكر: وهذا هو الخطأ الوحيد الذي يسميه الكتاب بنفسه في هذه الوحدة، في كتلة «أخطاء يجب تجنبها» التي تختتم الدرس في صفحة 80، وينص: المعادلة $ax + by + cz + d = 0$ ليست معادلة مستقيم في الفراغ بل هي معادلة مستوي فيه. معادلة خطية واحدة بثلاثة مجاهيل تصف مستويًا، ما دام واحد من معاملات x و y و z غير معدوم. وللمستقيم في الفراغ إمّا معادلتان معاً، وإمّا تمثيل وسيطي.

مثال الكتاب صفحة 78، وهو أول مثالين. حل الجملة $x + y - 2z = -1$ و $3x + y - z = -1$ و $-2x - 2y + 4z = 1$ يؤول إلى دراسة تقاطع المستويات $P_1 : x + y - 2z + 1 = 0$ و $P_2 : 3x + y - z + 1 = 0$ و $P_3 : -2x - 2y + 4z - 1 = 0$. ولا يحتاج هذا المثال إلى حذف ولا إلى غاوس: تكفيه قراءة الأشعة النازمة ثم مقارنة حد ثابت واحد.

$$\vec{n}_1(1, 1, -2)$$

$$\vec{n}_2(3, 1, -1)$$

$$\vec{n}_3(-2, -2, 4)$$

1. ① اقرأ الأشعة النازمة من المعاملات المعاملات هي مركبات الشعاع النازم، بلا حساب. وبمجرد أن تكتب الثلاثة يقع في عينك أن الثالث مضاعف للأول: كل مركبة فيه هي مركبة الأول مضروبة في 2 - .

$$\vec{n}_3 = -2\vec{n}_1$$

2. **ما الذي يعنيه هذا، وما الذي لا يعنيه** الشعاعان مرتبطان خطياً، فالمستويان P_1 و P_3 متوازيان. لكن هذا لم يحسم كل شيء: بقي احتمالان، الانطباق والتوازي مع الاختلاف. والأشعة النازمة لا تعرف شيئاً عن الحدّ الثابت، فلا تستطيع الفصل بينهما.

$$P_1 \parallel P_3$$

3. **اقسم لتصير الصورتان قابلتين للمقارنة** اقسم معادلة P_3 على -2 ، فتأخذ صورة معادلة P_1 نفسها في الطرف الأيسر. وانتبه إلى إشارة القاسم: القسمة على -2 تقلب إشارات الحدود كلّها، والحدّ الثابت معها.

$$x + y - 2z = -\frac{1}{2}$$

4. **قارن الحدّين الثابتين** الأول يعطي -1 والثالث يعطي $-\frac{1}{2}$ ، وهما مختلفان. فالمستويان متوازيان وغير منطبقين، ولا نقطة مشتركة بينهما. وما لا نقطة مشتركة فيه لاثنين، لا نقطة مشتركة فيه للثلاثة: التقاطع خالٍ، وليس للجملة حلول.

$$-1 \neq -\frac{1}{2}$$

ولاحظ ما لم يُستعمل: P_2 لم يدخل الحساب مرّةً واحدة، والكتاب لا ينبّه إلى ذلك. والسبب أنّ التقاطع الثلاثي محتوئاً في تقاطع أيّ اثنين منها، فخلوّ أحد التقاطعات الثنائية يكفي. أمّا العكس فلا يجوز: إذا تقاطع الأولان في مستقيم، فلا يُحكم أبداً قبل النظر في الثالث.

$$P_1 \cap P_3 = \emptyset \implies P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \emptyset$$

المستويان $P_1 : 2x - y + z = 1$ و $P_3 : -4x + 2y - 2z = 3$. ما وضعهما، وما الذي يترتب عليه؟
كيف أبداً؟ قارن المركّبات أولاً لتعرف إن كان الناطمان مرتبطين خطياً. وإن كانا، فالسؤال لم يُحسم بعد: اقسم إحدى المعادلتين حتّى تتفق الصورتان، ثم انظر في الحدّ الثابت.

أ) متوازيان ومختلفان، والتقاطع الثلاثي خالٍ مهما كان P_2

ب) منطبقان

ج) متقاطعان في مستقيم

أ. نعم. $\vec{n}_3 = -2\vec{n}_1$ فهما متوازيان، واقسم الثانية على -2 فتخرج $2x - y + z = -\frac{3}{2}$ ، والأولى تعطي 1 .
 حدّان ثابتان مختلفان مع ناظمين مرتبطين يعينان التوازي مع الاختلاف، ولا نقطة مشتركة.

مثال الكتاب صفحة 78 وحلّه صفحة 79، وعنوانه «تعيين تقاطع ثلاثة مستويات». المستويات

$$P_1 : -x + 2y + 3z - 5 = 0 \text{ و } P_2 : 3x - y - 4z + 5 = 0$$

$P_3 : 2x + 3y - 2z + 2 = 0$. أثبت أنّها تتقاطع في نقطة واحدة، وعيّن إحداثياتها. وهنا لا مفرّ من الحساب، والكتاب يتّبع طريقة غاوس.

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 5 \\ 3x - y - 4z = -5 \\ 2x + 3y - 2z = -2 \end{cases}$$

1. ① **انقل الحدّ الثابت إلى الطرف الآخر** المعادلة الديكارتيّة تنتهي بـ $= 0$ ، واطر الجملّة يضع الثابت وحده على اليمين. والنقل يقلب الإشارة: $-5 \rightarrow 5$. الكتاب يفعل هذا بلا تعليق في السطور الثلاثة، وهو أوّل موضعٍ يخسر فيه الطالب نقاطاً.

$$\begin{aligned} -x + 2y + 3z - 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow -x + 2y + 3z &= 5 \end{aligned}$$

2. ② **احذف x من السطرين الأخيرين** نجمع إلى السطر الثاني ثلاثة أمثال الأوّل، وإلى الثالث مثلي الأوّل. والعمليّة تجري على الطرفين معاً: $-5 + 3 \times 5 = 10$ و $-2 + 2 \times 5 = 8$. والسطر الأوّل يبقى كما هو، فهو الذي سيعطي x في النهاية.

$$\begin{cases} 5y + 5z = 10 \\ 7y + 4z = 8 \end{cases}$$

3. ③ **بسّط ثم احذف y** اقسم السطر الأوّل من الاثنين على 5 فيصير $y + z = 2$ ، وهذا يسهّل ما بعده. ثم اطرح من السطر الآخر سبعة أمثاله: $-3z = -6$ على اليسار، و $7y + 4z - 7(y + z) = -3z$ على اليمين.

$$y + z = 2, \quad -3z = -6$$

4. ④ **عُدّ إلى الأعلى بالترتيب** من $-3z = -6$ يخرج $z = 2$. ثمّ ضعه في $y + z = 2$ فيخرج $y = 0$ وحده. ثمّ ضع الاثنين في السطر الأوّل: $-x + 0 + 6 = 5$ أي $x = 1$. الترتيب ليس زينة: السطر الأوّل بمجهولين لا يعطي شيئاً.

$$z = 2, \quad y = 0, \quad x = 1$$

وللسؤال جوابان لا جواب واحد. الجواب الجبري أنّ الجملة تقبل حلاًّ وحيداً هو الثلاثيّة $(1, 0, 2)$. والجواب الهندسي أنّ المستويات تتقاطع في نقطة واحدة هي $I(1, 0, 2)$. ومن طلب منه «تعيين إحداثياتها» فقد طلب منه الاثنان معاً. وتحقّق دائماً: ضع الثلاثيّة في المعادلات الثلاث، فالسطر الثالث لم يُستعمل إلّا مرّةً واحدة.

$$(x, y, z) = (1, 0, 2) \Rightarrow I(1, 0, 2)$$

انتبه: وإذا خرج التقاطع مستقيماً، فلا تظنّ أنّ جوابك ناقص. الجدول يقبل Δ معرّفاً باثنتين من المعادلات الثلاث، وهذه صيغةٌ تامة، وقد قال الدرس السابق الشيء نفسه بعبارّةٍ أصرح. أمّا إن طلب التمثيل الوسيطي صراحةً، فاصنعه بحلّ الجملة: أبق مجهولاً حرّاً وعبّر عن الآخرين به، ولا يكفي أن تنقل المعادلتين.

الجملة $2x - y + 3z = 2$ و $x + 2y + z = 1$ و $3x - 4y + 5z = 4$. ولاحظ في الأطراف اليسرى أن $3x - 4y + 5z = 2(2x - y + 3z) - (x + 2y + z)$. ما هو تقاطع المستويات الثلاثة؟

كيف أبدأ؟ السطر الثالث تركيب من الأولين في طرفه الأيسر. فاحسب التركيب نفسه في الطرف الأيمن، وقارن ما يخرج بـ 4 .

(أ) مستقيم مشترك

(ب) مجموعة خالية

(ج) نقطة وحيدة

ب. نعم. كل ثلاثية تحقق السطرين الأولين تعطي في الطرف الأيسر الثالث القيمة 3 ، والسطر الثالث يطلب 4 . فلا ثلاثية تحقق الثلاثة، والتقاطع خالٍ. وهندسيًا: $\mathcal{P}_3$ يوازي فصل الأولين المشترك ولا يحويه.

المصدر: الرياضيات، الجزء الثاني، الصفحات 77 إلى 79 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.