



الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

تقاطع مستقيمات ومستويات

كل سؤال عن وضعٍ يصير جملةً معادلات، وعدد حلولها هو الجواب
المستقيمات والمستويات في الفراغ . الوحدة 3 . الدرس 3

الأشعة تقول لك الاتجاه، والجملة تقول لك الباقي. في هذا الدرس سؤالان: أين يلتقي مستويان، وأين يلتقي مستقيماً ومستوي. والطريق واحد في الحالتين: اقرأ الأشعة أولاً لتعرف أي الحالات ممكنة، ثم اكتب الجملة، ثم عدّ حلولها. لا حلّ يعني التوازي، حلّ وحيد يعني نقطة، وعدد لا نهائيّ يعني مستقيماً أو مستويّاً كاملاً. وبين نصّ الكتاب وجدوله فجوةً سنسدّها.

تقاطع مستويين

كلّ ما في هذا الدرس يجري في معلمٍ متجانس، يضعه الكتاب في سطرٍ واحد تحت العنوان بعبارة «جملة متجانسة»، ويسمّيه في تدريبات الصفحة نفسها «معلماً متجانساً». الاسمان لشيء واحد، والاختلاف في الصياغة لا في المعنى. وللمستويين معادلتان ديكارتيتان، ومن معاملات كلّ منهما تقرأ شعاعها الناظم بلا حساب. والسؤال الأول يُحسم بالأشعة وحدها: هل الشعاعان الناظران مرتبطان خطيّاً أم لا.

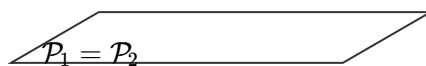
1.3. تقاطع مستويين

$\vec{n}_1(a_1, b_1, c_1)$ ، $\vec{n}_2(a_2, b_2, c_2)$ ليكن $P_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ و $P_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. يمكن، من حيث المبدأ، معرفة إن كانا متوازيين أو متقاطعين انطلاقاً من كون شعاعيهما الناظرين مرتبطين خطيّاً أو غير ذلك.

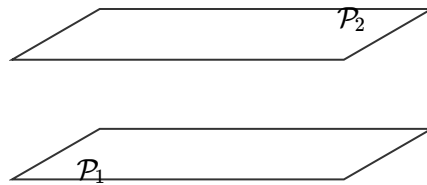
وإذا كانا متقاطعين، فإن إحداثيات نقاط التقاطع هي حلول هذه الجملة. ولها عدد لا نهائيّ من الحلول، تمثّلها نقاط المستقيم Δ ، الفصل المشترك للمستويين.

الكتاب، الصفحة 74

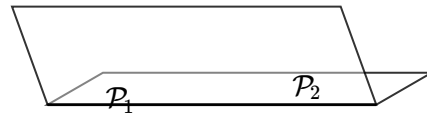
تذكّر: معادلتان بثلاثة مجاهيل ليستا جملةً ناقصة. وإذا كان المستويان متقاطعين، فنقص معادلةٍ عن عدد المجاهيل هو بالضبط ما يترك بُعداً واحداً حرّاً، وذلك البعد هو المستقيم. ومن رأى المجاهيل أكثر من المعادلات وأعلن «لا حلّ» قلب النتيجة رأساً على عقب: انعدام الحلّ يأتي من تناقضٍ بين سطرين، لا من نقصٍ في عددها.



الحالة الأولى، المستويان منطبقان: المعادلتان تصفان المستوي نفسه، وحلول الجملة هي كلّ ثلاثيّة تحقّق إحدهما.



الحالة الثانية، متوازيان ومختلفان: لا نقطة مشتركة، وليس للجملة حلول.



الحالة الثالثة، متقاطعان: المشترك بينهما هو المستقيم المرسوم على الحافة، وهو Δ ، وحلول الجملة هي نقاطه.

انتبه: وهنا جملة من الكتاب تستحق أن تُحفظ بنصّها: المستقيم Δ ليس معرّفًا بتمثيل وسيطي، بل هو مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ حيث (x, y, z) هي حلول (S) . أي إنّ معادليّ المستويين وصفٌ للمستقيم لا تمثيلٌ وسيطيّ له. إن طلب منك تمثيلٌ وسيطيّ، فعليك أن تصنعه بحلّ الجملة، ولا يكفي أن تنقل المعادلتين.

انتبه: واحذر الخطوة التي تسبق ذلك كلّها: الشعاعان الناظران المرتبطان خطيّاً لا يقولان «متوازيان ومختلفان»، بل يتركان احتمالين، الانطباق والتوازي المختلف. الفصل بينهما بخطوة واحدة: خذ نقطةً من أحد المستويين وضعها في معادلة الآخر. الفكرة نفسها التي فصلت في الدرس السابق بين مستقيمين متوازيين.

المستويان $P_1 : 2x - y + 3z - 5 = 0$ و $P_2 : -4x + 2y - 6z + 10 = 0$. ما وضعهما؟
كيف أبدأ؟ اقرأ الشعاعين الناظرين وقارن مركباتهما. إن خرجا مرتبطين خطيّاً فأنت أمام احتمالين، ولا يفصل بينهما إلّا نظرةً إلى الحدّ الثابت أو نقطةً تضعها في المعادلة الأخرى.

(أ) متوازيان ومختلفان

(ب) متقاطعان في مستقيم

(ج) منطبقان

ج. نعم. اضرب المعادلة الأولى في -2 فتخرج الثانية حرفاً بحرف، والحدّ الثابت معها. معادلتان متناسبتان بتمامهما تصفان المستوي نفسه، وحلول الجملة هي كلّ نقاطه.

مثال الكتاب صفحة 75، وعنوانه «تعيين التمثيل الوسيطي للفصل المشترك لمستويين». تبيّن أنّ
 $P_1 : 2x + y - z + 2 = 0$ و $P_2 : x + 2y - z + 1 = 0$ متقاطعان، ثمّ جدّ تمثيلاً وسيطياً لفصلهما
 المشترك d .

$$\vec{n}_1(2, 1, -1), \quad \vec{n}_2(1, 2, -1)$$

1. ① **تبيّن من التقاطع أولاً** اقرأ الشعاعين الناظرين من المعاملات، ثمّ قارن المركّبات: $\frac{2}{1} = 2$ و $\frac{1}{2}$ ليستا متساويتين، فالمركّبات غير متناسبة. إذن الشعاعان غير مرتبطين خطيّاً والمستويان متقاطعان.

$$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{2}$$

2. ② **اختر المجهول الذي تُبقّيه حرّاً** ثلاثة مجاهيل ومعادلتان، فأحدها يبقى حرّاً وأنت تختار أيّها. الكتاب يبقى z ويعبّر عن x و y بدلالته، بطريقة الحذف بالتعويض.

$$\begin{cases} 2x + y = z - 2 \\ x + 2y = z - 1 \end{cases}$$

3. ③ **احذف x** اطرح نصف السطر الأول من الثاني، فيسقط x ويبقى $z = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$ ، أي $y = \frac{1}{3}z$. ثمّ عُدّ إلى السطر الأول فتخرج x .

$$y = \frac{1}{3}z, \quad x = \frac{1}{3}z - 1$$

4. ④ **سمّ المجهول الحرّ وسيطاً** z يأخذ أيّة قيمةٍ حقيقية، فسّمّه وسيطاً. الكتاب يضع $z = 3t$ لا $z = t$ ، وبنّصه «تسهيلاً للكتابة»: الثلاثة تُلغى المقامات فقط.

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t \\ z = 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

العامل 3 ليس قاعدة بل راحة. لو وضعت $z = t$ لخرج $(t, \frac{t}{3}, \frac{t}{3} - 1)$ ، وهو المستقيم نفسه بكتابةٍ أخرى، وجوابك صحيح. التمثيل الوسيط ليس وحيداً أبداً، وقد رأيت ذلك في الدرس السابق.

$$\left(\frac{t}{3} - 1, \frac{t}{3}, t \right)$$

تقاطع مستقيم ومستو

السؤال الثاني يغيّر الأشعة التي تقارنها. عند مستويين قارئاً ناظماً بناظم. وهنا تقارن شعاع توجيه المستقيم بالشعاع الناظم للمستوي، وهما شيئان مختلفان: الناظم يُقرأ من معادلة المستوي، والموجّه من التمثيل الوسيط. من خلط بينهما قارن شيئاً بنفسه.

2.3. تقاطع مستقيم ومستوى

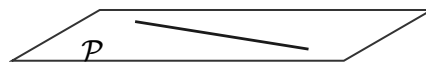
Δ وليكن $\vec{n}(a, b, c)$ ، $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ مستويًا له الشعاع الناقص $\vec{n}$ ، وليكن $\mathcal{P}: ax + by + cz + d = 0$ مستويًا يوجهه $\vec{u}$ ويمر بالنقطة $A(x_0, y_0, z_0)$. يمكن، من حيث المبدأ، معرفة إن كان Δ موازيًا لـ $\mathcal{P}$ أو قاطعًا له تبعًا لكون $\vec{u}$ عموديًا على $\vec{n}$ أو لم يكن. وعبرة «من حيث المبدأ» من الكتاب، وهي التي تترك الثغرة التي يشرحها التحذير التالي.

$$\text{وإذا قطع } \Delta \text{ المستوى } \mathcal{P}, \text{ فإن إحداثيات نقطة التقاطع هي الثلاثية } (x, y, z) \text{ التي تحل } \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \\ z = \gamma t + z_0 \end{cases}$$

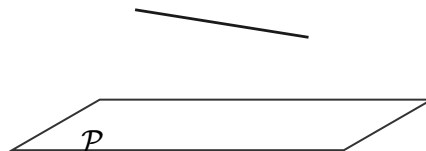
هذه الجملة، صفحة 75.

الكتاب، الصفحة 74

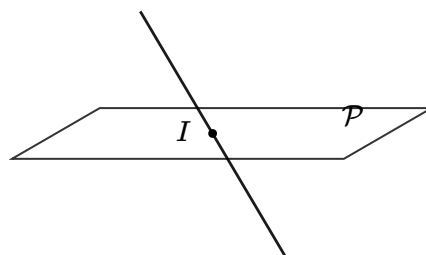
انتبه: وهنا فجوة بين نص الكتاب وجدوله، وهي أهم ما في هذا الدرس. النص في صفحة 74 يذكر حالتين: موازي أو قاطع، بحسب $\vec{u} \cdot \vec{n}$. والجدول في الصفحة التالية يعرض ثلاثًا. والسبب أن $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ ينفي الاختراق ولا يقول أين يقع المستقيم: قد يكون خارج المستوي تمامًا، وقد يكون محتويًا فيه. النص لا يقول كيف تفصل بينهما، والجواب سطر واحد: خذ نقطة من المستقيم وضعها في معادلة المستوي. تحققت المعادلة فالمستقيم داخل المستوي، وإلا فهو يوازيه ولا يلمسه.



الحالة الأولى، المستقيم محتوي في المستوي: للجملة عدد لا نهائي من الحلول، تمثلها نقاط Δ كلها.



الحالة الثانية، المستقيم يوازي المستوي ولا يلمسه: ليس للجملة حلول. لاحظ أن $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ في هذه الحالة وفي السابقة معًا.



الحالة الثالثة، المستقيم يقطع المستوي: للجملة حلٌ وحيد، تمثله النقطة I . الكتاب يرسم الجزء الواقع خلف المستوي متقطعًا، وأداتنا ترسم المستقيم كاملاً؛ موضع الاختراق هو I المعلمة.

مثال الكتاب صفحة 76، وعنوانه «تعيين تقاطع مستقيم ومستوي». النقطتان $A(2, 1, -2)$ و $B(-1, 2, 1)$ والمستوي $\mathcal{P}: 2x - y + z - 2 = 0$. تيقن أن (AB) يقطع $\mathcal{P}$ في نقطة I ، وعين إحداثياتها.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}(-3, 1, 3), \quad \vec{n}(2, -1, 1)$$

1. ① الجداء السلمي يحسم الوجود احسب $\vec{n} \cdot \vec{u}$. خرج -4 ، وهو غير معدوم، فالشعاعان غير متعامدين، وذلك يُثبت التقاطع. ولاحظ ما لا يقوله هذا: عدم التعامد لا يعني التوازي ولا يعني شيئاً عن الاتجاه، بل ينفي الحالتين الأخريين فقط.

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = -6 - 1 + 3 = -4 \neq 0$$

2. ② اكتب المستقيم وسيطياً الكتاب يقفز هذه الخطوة ويضع السطور الثلاثة في الجملة مباشرة. هي من A نقطة انطلاق ومن $\overrightarrow{AB}$ شعاع توجيه، كما في الدرس السابق.

$$\begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = t + 1 \\ z = 3t - 2 \end{cases}$$

3. ③ عوض في معادلة المستوي ضع السطور الثلاثة في $2x - y + z - 2 = 0$. المجاهيل الثلاثة تختفي ويبقى مجهول واحد، وهذا هو كل مكسب التمثيل الوسيطي هنا.

$$-4t - 1 = 0 \implies t = -\frac{1}{4}$$

4. ④ أعد t إلى السطور الثلاثة t ليس جواباً، فالمطلوب نقطة. عوض القيمة في كل سطر على حدة. والكتاب يعرض الجملة ثلاث مرّات متتالية لهذا السبب بالذات: كي ترى أن العمل لا ينتهي عند t .

$$I\left(\frac{11}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{11}{4}\right)$$

اكتب معادلة المستوي بالصورة $ax + by + cz + d = 0$ قبل أن تعوّض، دائماً. من أخذ $x + y + z = 1$ وحسب بدل $d = 1$ خرج بقيمة خاطئة للوسيط ثم بنقطة خاطئة، والحساب كلّ بعدها سليم وخاطئ معاً.

$$x + y + z = 1 \implies d = -1$$

المستوي $P : 2x + 3y - z = 0$ والمستقيم d المعرّف بـ $x = s + 1$ و $y = 2s + 1$ و $z = 8s - 3$. ما وضعهما؟

كيف أبدأ؟ احسب الجداء السلمي أولاً، فهو يحسم حالة واحدة من الثلاث. إن خرج معدوماً فأنت في الفجوة التي شرحها التحذير أعلاه، وعندها صُغ نقطة من المستقيم في معادلة المستوي.

(أ) يقطعه في نقطةٍ وحيدة

(ب) يوازيه ولا يلمسه

(ج) محتوئ في المستوي

ب. نعم. الجداء معدوم، فبقيت حالتان. خذ $s = 0$ فتكون النقطة $(1, 1, -3)$ ، وضعها في المعادلة:

$2 + 3 + 3 = 8 \neq 0$. لا تنتمي، فالمستقيم خارج المستوي ويوازيه.

المصدر: الرياضيات، الجزء الثاني، الصفحات 74 إلى 76 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.