

بسيطة

الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

التمثيلات الوسيطة

ثلاث معادلات ووسيط واحد، ومجاله يقرّر الشكل
المستقيمت والمستويات في الفراغ . الوحدة 3 . الدرس 2

الدرس السابق وصف المستقيم بالمعاملات. هذا الدرس يصفه بالإحداثيات، وبأداة واحدة: عددٍ حرّ اسمه الوسيط، كلّما أعطيتّه قيمةً أعطاك نقطةً من المستقيم، ولا يعطيك نقطةً مرّتين. ثلاث معادلاتٍ تكفي، ومجال الوسيط وحده يفرّق بين المستقيم والقطعة ونصف المستقيم. وفي وسط الدرس فحّ يضعه الكتاب بالأحمر ولا يدربك عليه أبداً.

التمثيل الوسيطي لمستقيم

أبدأ من شرطٍ تعرفه: النقطة M تقع على المستقيم d المارّ بالنقطة A والموجّه بالشعاع $\vec{u}$ إذا وفقط إذا وُجد عددٌ حقيقيّ t يحقّق $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$. هذه مساواة شعاعية واحدة. اكتبها بالمرّكبات في معلمٍ متجانس فتصير ثلاث معادلات، وذلك كلّ ما في المبرهنة.

مبرهنة 4

$\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ ليكن d مستقيماً يمرّ بالنقطة $A(x_0, y_0, z_0)$ ويوجّهه الشعاع $\vec{u}(a, b, c)$. انتماء $M(x, y, z)$ إليه يكافئ وجود عددٍ حقيقيّ t يحقّق هذه المساواة.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{array} \right., \quad t \in \mathbb{R}$$

فالمستقيم d هو مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ التي تحقّق هذه الجملة. تسمّى الجملة تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d ، ويسمّى t وسيطاً.

الكتاب، الصفحة 71

تذكّر: اقرأ الجملة في اتجاهين، فهذا ما يجعلها أداة: معاملات t الثلاثة هي مرّكبات شعاع التوجيه، والحدود الثابتة هي إحداثيات نقطةٍ من المستقيم. صُغ $t = 0$ فتظهر النقطة أمامك. من قرأ الشعاع من الثوابت أو النقطة من معاملات t قلب الدور كلّهُ.

انتبه: الكتاب لا يشترط في نصّ المبرهنة أن يكون $\vec{u}$ غير معدوم، لكنّ الشرط لازم: لو كان الشعاع معدوماً لأعطت الجملة النقطة A نفسها مهما تغيّر t ، فلا يكون هناك مستقيم بل نقطة. وإذا بنيت الشعاع بنفسك من نقطتين، فالشرط هو أن تكونا مختلفتين.

وبعد المبرهنة يقول الكتاب شيئاً سهلاً تجاوزه، وهو الذي يجعل الوسيط مفيداً: لكل قيمة للوسيط نقطة وحيدة من المستقيم، ولكل نقطة من المستقيم قيمة وحيدة للوسيط. التقابل تام في الاتجاهين، فالوسيط ليس وصفاً تقريبياً بل عنواناً دقيقاً لكل نقطة.

مثال الكتاب صفحة 71: أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) حيث $A(1, 2, 3)$ و $B(2, 3, 1)$. الكتاب يكتب النتيجة بلا خطوات، وهذه هي الخطوات.

$$A(1, 2, 3), \quad B(2, 3, 1)$$

1. اصنع شعاع التوجيه المستقيم معرّف بنقطتين، فاطرح إحداثيات الأولى من الثانية. أي شعاع مواز يصلح، لكن $\overrightarrow{AB}$ هو الأقرب إلى اليد.

$$\overrightarrow{AB}(1, 1, -2)$$

2. اختر نقطة الانطلاق خذ A ، فهي معطاة. ولو أخذت B لحصلت على تمثيل آخر للمستقيم نفسه، وهذا جائز تماماً ولا يعني أنك أخطأت.

$$A(1, 2, 3)$$

3. ركب الجملة في كل سطر: معامل t من الشعاع، والثابت من النقطة. ولا تنس مجال الوسيط، فهو جزء من الجواب لا زينة.

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = -2t + 3 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

4. تحقق بقيمتين الكتاب لا يفعل هذا، وهو أرخص تحقق في الدرس كله: ضع $t = 0$ فتخرج A ، وضع $t = 1$ فتخرج B . إن خرجت النقطتان فالجملة صحيحة.

$$t = 0 \Rightarrow A, \quad t = 1 \Rightarrow B$$

للمستقيم الواحد تمثيلات وسيطة لا تُحصى، بعدد اختياراتك للنقطة وللشعاع. فلا تسأل «هل جوابي هو جواب الكتاب؟»، بل «هل جوابي يصف المستقيم نفسه؟». والسؤال الثاني له طريقة، وهي الفقرة التالية.

$$\overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB}$$

التمثيل الوسيطي لقطعة مستقيمة ولنصف مستقيم

هذه أنظف فقرة في الدرس، لأنها لا تضيف معادلةً واحدة. المعادلات الثلاث هي معادلات مبرهنة 4 نفسها، والذي يتغير هو المجموعة التي يتحول فيها الوسيط: $\mathbb{R}$ كلها تعطي المستقيم، وكلّ تضيق لها يقطع منه جزءاً. والكتاب يطبع مجال الوسيط بالأحمر في الحالتين، وهذا وحده يكفي إشارةً إلى أين ينظر. ولاحظ أنّه لا يشترط هنا أن تكون النقطتان مختلفتين، والشرط لازمٌ مع ذلك، وإلاّ كان $\overrightarrow{AB}$ معدوماً.

2.2. التمثيل الوسيطي لقطعة مستقيمة ولنصف مستقيم

$t \in [0, 1]$ لتكن $A(x_0, y_0, z_0)$ و $B(x_1, y_1, z_1)$ نقطتين من الفراغ، وليكن $\vec{u}(a, b, c) = \overrightarrow{AB}$. عندئذٍ القطعة المستقيمة $[AB]$ هي مجموعة النقاط التي تحقّق جملة مبرهنة 4 بهذا المجال. الطرفان داخلان: $t = 0$ يعطي A و $t = 1$ يعطي B .

$t \in [0, +\infty[$ وبهذا المجال نصف المستقيم $[AB)$ الذي مبدؤه A ويمرّ بالنقطة B . القوس المفتوح عند $+\infty$ هو الكتابة الفرنسية التي يتبعها الكتاب.

الكتاب، الصفحة 71

تذكّر: القوس المعقوف يقف عند المبدأ. $[AB)$ يبدأ من A ويمضي في جهة B ، و $[BA)$ يبدأ من B ويمضي في جهة A ، وهما نصفان مختلفان لا صورتان لشيء واحد. للانتقال بينهما تبدّل نقطة الانطلاق وشعاع التوجيه معاً، لا واحداً منهما.

انتبه: وهنا أكثر ما يضيع من العلامات بلا سبب: كتابة الجملة وإهمال المجال. المستقيم والقطعة ونصف المستقيم تكتب معادلاتها الثلاث بالحروف نفسها، ولا يفرّق بينها إلّا سطرٌ واحد قصير. جوابٌ بلا مجالٍ للوسيط ليس جواباً ناقصاً فحسب، بل لا يميّز ثلاثة أشكالٍ مختلفة.

كتبّت تمثيلاً للقطعة $[AB]$ بالمجال $[0, 1]$ ، ثمّ بدّلّت نقطة الانطلاق إلى B وتركّت الشعاع $\overrightarrow{AB}$ كما هو. ماذا صار التمثيل يصف؟

كيف أبدأ؟ ضع طرفي المجال، $t = 0$ ثمّ $t = 1$ ، واقرا أيّ نقطتين تخرجان. الشكل هو ما بين النقطتين الخارجيتين، لا ما كنت تنويه.

(أ) القطعة $[AB]$ نفسها، فالشعاع لم يتغير

(ب) قطعةً أخرى، طرفاها B ونقطةٌ خلفه

(ج) القطعة $[BA]$

ب. نعم. $t = 0$ يعطي B ، و $t = 1$ يعطي النقطة التي تبعد عن B بمقدار $\overrightarrow{AB}$ في الجهة نفسها، أي امتداد القطعة خلف B . قطعةً بالطول نفسه، في موضعٍ آخر.

جملتان مختلفتان، ومستقيم واحد

لأن التمثيل غير وحيد، يصير هذا أول ما تُسأل عنه: هل هذان تمثيلان لمستقيم واحد أم لمستقيمين؟ الكتاب يجيب في فقرة «تكريساً للفهم» بخطوتين، وكلتاهما ضرورية.

مثال الكتاب صفحة 72. الجملة (S) هي $x = 3t + 1$ و $y = 4t$ و $z = -t + 1$ ، والجملة (S') هي $x = -9t + 4$ و $y = -12t + 4$ و $z = 3t$. هل تصفان مستقيماً واحداً؟

$$\vec{u}(3, 4, -1), \quad \vec{u}'(-9, -12, 3)$$

1. ① **الاتجاه أولاً** اقرأ الشعاعين من معاملات الوسيط، وانظر هل أحدهما مضاعف للآخر. هنا كل مركبة في الثاني تساوي مركبة الأول مضروبة في -3 ، فالشعاوان مرتبطان خطياً والمستقيمان متوازيان.

$$\vec{u}' = -3\vec{u}$$

2. ② **الإشارة السالبة لا تعني شيئاً** ضرب شعاع التوجيه في أي عدد غير معدوم يترك المستقيم في مكانه، ولو كان العدد سالباً. ما يتغير هو جهة السير على المستقيم عند تزايد الوسيط، لا المستقيم نفسه.

$$k \neq 0 \Rightarrow k\vec{u} \parallel \vec{u}$$

3. ③ **التوازي وحده لا يكفي** متوازيان يعني إما منطبقين وإما متوازيين مختلفين، وبين الحالتين فرق كبير. الحسم بخطوة واحدة: خذ نقطة من الأول واسأل هل تحقق الثاني.

$$A(1, 0, 1) \in (S)$$

4. ④ **اختبر النقطة في الجملة الثانية** ابحث عن قيمة للوسيط تعطي A في (S') . من السطر الأول $-9t + 4 = 1$ تجد $t = \frac{1}{3}$ ، ثم تحقق من السطرين الباقيين بالقيمة نفسها. ثلاثة سطور بقيمة واحدة، وإلا فلا انتماء.

$$t = \frac{1}{3} \Rightarrow (1, 0, 1)$$

5. ⑤ **اجمع الشرطين** اتجاه واحد ونقطة مشتركة يعينان الانطباق. فالجملتان تمثيلان وسيطيان للمستقيم نفسه، مهما بدا شكلهما مختلفين.

$$d = d'$$

خطوتان لا واحدة: الاتجاه يقول إن كانا متوازيين، والنقطة تقول إن كانا منطبقين. من وقف عند الأولى خلط المنطبق بالتوازي المختلف، ومن بدأ بالثانية وحدها لم يُثبت شيئاً، لأن نقطة مشتركة بين مستقيمين غير متوازيين تعني التقاطع لا الانطباق.

$$\vec{u}' = k\vec{u} \wedge A \in d'$$

تقاطع مستقيمين، والفتح الأحمر

السؤال الثاني في «تكريساً للفهم»: كيف ندرس تقاطع مستقيمين معرّفين وسيطياً؟ الجواب يبدو مباشراً، ساو بين الجملتين، وفي هذه المساواة بالذات يضع الكتاب كلمة واحدة بالأحمر.

انتبه: انتبه: كون I على d يعني وجود قيمة للوسيط تعطىها في جملة d . وكونها على d' يعني وجود قيمة للوسيط تعطىها في جملة d' . ولا شيء يجعل القيمتين متساويتين. الوسيط يخصّ المستقيم لا النقطة، ولذلك يقول الكتاب حرفياً إنه يجب استعمال حرف آخر، s مثلاً، للوسيط على المستقيم الثاني. من كتب t في الجملتين وجد تناقضاً حيث لا تناقض، وأعلن أنّ المستقيمين لا يتقاطعان.

مثال الكتاب صفحة 72. المستقيم d هو $x = t + 1$ و $y = 2t - 3$ و $z = -t + 2$ ، والمستقيم d' هو $x = 3s + 2$ و $y = -s - 1$ و $z = s + 1$. لاحظ الحرفين من السطر الأول.

$$I \in d \cap d'$$

1. ① اكتب الجملة بحرفين نقطة التقاطع تحمل إحداثيات واحدة، فساو بين التعبيرين في كلّ سطر. المجهولان اثنان، t و s ، والمعادلات ثلاث.

$$\begin{cases} t + 1 = 3s + 2 \\ 2t - 3 = -s - 1 \\ -t + 2 = s + 1 \end{cases}$$

2. ② حلّ باثنتين من السطر الثالث $s = 1 - t$. عوّض في السطر الأول، فتحصل على $t + 1 = 5 - 3t$ ، أي $t = 1$ ، ومنها $s = 0$.

$$t = 1, \quad s = 0$$

3. ③ السطر الباقي هو الامتحان معادلتي من ثلاث تكفيان في الحالة العامة لإيجاد قيمتين، فليستا اختباراً. الباقية هي التي تقرّر. صُغ $t = 1$ و $s = 0$ في السطر الثاني: يساراً -1 ، ويميناً -1 . تحقّقت، فالتقاطع موجود.

$$2(1) - 3 = -1 = -(0) - 1$$

4. ④ الجواب نقطة، لا قيمة وسيط $t = 1$ ليس جواباً. أعِدْ t إلى جملة d فتخرج الإحداثيات، ثم أعِدْ s إلى جملة d' كتحقّق: يجب أن تخرج النقطة نفسها.

$$I(2, -1, 1)$$

حرفان للمجهولين وثلاث معادلات، وهذا هو الشكل الطبيعي لهذه المسألة لا خطأً فيها. اثنتان تعطيان المرشح، والثالثة تقبله أو ترفضه. ومن كتب حرفاً واحداً بدل حرفين جعل المسألة ثلاث معادلات بمجهول واحد، وهي ترفض كل شيء تقريباً.

$$(t, s) \in \mathbb{R}^2$$

وضع مستقيمين في الفراغ

في المستوي، مستقيمان غير متوازيين يتقاطعان حتماً. في الفراغ لا. يوجد وضعٌ ثالث لا مقابل له في المستوي: أن يكونا غير متوازيين ولا يلتقيا أبداً، وهو ما يسميه الكتاب متخالفين، أي غير واقعين في مستوي واحد. ولهذا وحده تصير دراسة الوضع خطوتين لا خطوة.

تذكر: ابدأ بالأشعة الموجهة، هكذا يوصي الكتاب. إن كانت مرتبطة خطياً فالمستقيمان متوازيان، ويبقى أن تفصل بين المنطبقين والمتوازيين المختلفين بنقطة واحدة. وإن لم تكن مرتبطة، فبقي احتمالان اثنان: متقاطعان أو متخالفان، ولا يحسم بينهما إلا جملة المعادلات.

مثال الكتاب صفحة 73. المستقيم d هو $x = t + 1$ و $y = -3t + 2$ و $z = -3t + 3$ ، والمستقيم d' هو $x = t$ و $y = -3t - 3$ و $z = -t + 1$. ادرس وضعهما. لاحظ أن الكتاب يكتب الوسيطين بالحرف نفسه في نص التمرين، ويبدل الثاني إلى s عند الحل، وهذا هو الموضع الذي يلزم فيه التبديل.

$$\vec{u}(1, -3, -3), \quad \vec{u}'(1, -3, -1)$$

1. هل المركبات متناسبة؟ قارن مركبةً بمركبة: النسبتان الأوليان 1 و 1 ، والثالثة 3 . نسبة واحدة تخالف الآخرين تكفي: الشعاعان غير مرتبطين خطياً، فالمستقيمان ليسا متوازيين.

$$\frac{1}{1} = \frac{-3}{-3} = 1 \neq \frac{-3}{-1}$$

2. لا تستنتج التقاطع هنا هذه أكثر خطوة يُقفز فوقها. عدم التوازي في المستوي يعني التقاطع، وفي الفراغ لا يعني إلا أن الوضع أحد اثنين: متقاطعان أو متخالفان. والحسم يحتاج حساباً، لا استنتاجاً.

3. بَدِّل الحرف ثم اكتب الجملة سمّ وسيط d' بالحرف s قبل أي مساواة، للسبب الذي شرحته الفقرة السابقة. ثم ساو سطرًا بسطر، وانقل المجهولين إلى اليسار والأعداد إلى اليمين، فتصير ثلاث معادلات بمجهولين في صورةٍ يسهل مقارنتها.

$$\begin{cases} t - s = -1 \\ -3t + 3s = -5 \\ -3t + s = -2 \end{cases}$$

4. ④ اقرأ التناقض قبل أن تحسب اضرب المعادلة الأولى في 3 - فيصير طرفها الأيسر مطابقاً للثاني، ويصير طرفها الأيمن 3 . والمعادلة الثانية تقول 5- . عددٌ واحد لا يساوي عددين، فالجملة بلا حلول.

$$-3t + 3s = 3 \neq -5$$

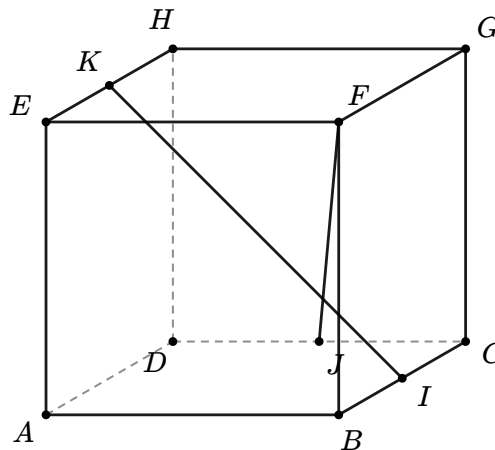
5. ⑤ سمّ الوضع غير متوازيين ولا يلتقيان، إذن متخالفان، أي لا يقعان في مستوٍ واحد. ولاحظ أنّ الجواب خرج من تناقضٍ بين معادلتين، لا من حلّ.

$$d \cap d' = \emptyset$$

جملةٌ بلا حلول هنا ليست فشلاً في الحساب بل هي الجواب نفسه. وهذا يقلب عادةً راسخة: في أكثر المسائل يكون التناقض علامةً على خطأ، وهنا هو النتيجة المطلوبة. تحقّق من نقلك مرّةً، ثمّ اكتب «متخالفان» بثقة.

$$3 \neq -5$$

انتبه: ولا تخلط بين التمثيل الوسيطي والمعادلة الديكارتية. ثلاث معادلاتٍ بوسيطٍ واحد تصف مستقيماً، ومعادلةً واحدة من الشكل $ax + by + cz + d = 0$ تصف مستوياً. وهذا هو الخطأ الوحيد الذي تنصّ عليه فقرة «أخطاء يجب تجنّبها» في نهاية الوحدة، صفحة 80، بنصّها: المعادلة $ax + by + cz + d = 0$ ليست معادلة مستقيم في الفراغ بل هي معادلة مستو فيه. عُدّ المعادلات والوسائط قبل أن تسمّي الشكل.



مكعبٌ طول ضلعه 1 : I منتصف [BC] و J منتصف [CD] و K منتصف [EH]. المرسوم هنا (IK) و (FJ) كما يطلب نصّ التمرين. وشكل الكتاب يرسم بدلها [KI] و [FI] ، فإن قارنت فلا تحسب الرسم، النصّ هو المرجع.

في هذا المكعب، هل يتقاطع المستقيمان (IK) و (FJ) ؟

كيف أبدأ؟ اكتب إحداثيات النقاط الأربع في المعلم $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ ، فكلها من 0 و 1 و $\frac{1}{2}$. ثم اصنع شعاعي التوجيه واتبع خطويّ الفقرة السابقة بالترتيب.

(أ) نعم، لأنّ شعاعي التوجيه غير مرتبطين خطيّاً

(ب) لا، لأنّهما متوازيان

(ج) لا، وهما متخالفان

ج. نعم. شعاعا التوجيه $(-1, 0, 1)$ و $(-\frac{1}{2}, 1, -1)$ غير مرتبطين، والجملة تعطي من السطر الثاني والثالث قيمتين تخالفان السطر الأوّل. فلا تقاطع، والنقاط الأربع ليست في مستوٍ واحد.

المصدر: الرياضيات، الجزء الثاني، الصفحات 71 إلى 73 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.