

الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

المستقيم والمستوي بصفتيها مراكز أبعاد متناسبة

إشارة المعامل تقرّر الشكل: مستقيم، أم قطعة، أم داخل مثلث

المستقيمت والمستويات في الفراغ . الوحدة 3 . الدرس 1

في الوحدة الأولى تعلّمت أداةً تمشي في اتجاه واحد: إذا انتهرت إلى G مركز أبعاد متناسبة لنقطتين، فالنقاط الثلاث على استقامة واحدة. هذا الدرس يقرب الأداة إلى مساواة بين مجموعتين: المستقيم (AB) ليس فيه نقاطٌ تُشبه مراكز الأبعاد، بل هو مجموعتها بالتمام. والمكسب الثاني أنّ إشارة المعامل تصير رسماً: معاملٌ حرّ يعطي المستقيم كلّ، ومعاملان غير سالبين يعطيان القطعة، وثلاثة موجبة تماماً تعطي داخل المثلث. لا هندسة جديدة في الدرس، بل لغة واحدة تصف ثلاثة أشكال.

المستقيمت والقطع المستقيمة في الفراغ

يفتح الكتاب بجملةٍ تقول إنّه لا جديد هنا: «كما هي الحال في المستوي، في الفراغ أيضاً». المستقيم (AB) هو مجموعة النقاط M التي تحقّق $\overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB}$ حيث t عددٌ حقيقيّ كيفي، والقطعة $[AB]$ هي المجموعة نفسها عندما تُحصر t في $[0, 1]$. هذا معروفٌ من المستوي. الجديد كلّ في السطر التالي: الكتاب يعيد كتابة الشيء نفسه بلغة مركز الأبعاد المتناسبة.

مبرهنة 1

$\overrightarrow{AM} + t \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ لتكن A و B نقطتين من الفراغ، و t عدداً حقيقياً. هذا الشرط هو بعينه القول إنّ M مركز الأبعاد متناسبة للنقطتين المثقلتين $(A, 1-t)$ و (B, t) . ومجموع المعاملين $(1-t) + t = 1$ دائماً، فلا يكون معدوماً أبداً، ومركز الأبعاد موجودٌ ووحيدٌ لكلّ t .

$M \in (AB)$ ، $t \in \mathbb{R}$ المستقيم (AB) هو مجموعة مراكز الأبعاد متناسبة لتلك النقطتين المثقلتين عندما تتحوّل t في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ كلّها.

$M \in [AB]$ ، $t \in [0, 1]$ والقطعة المستقيمة $[AB]$ هي المجموعة نفسها بعد حصر t في المجال $[0, 1]$. الشرط الشعاعي في السطر الأول واحدٌ حرفاً بحرف في الحالتين، والمجال وحده يفرّق بين مستقيمٍ لا نهائيٍّ وقطعةٍ لها طرفان.

الكتاب، الصفحة 67

تذكّر: الكتاب لا يقول في نصّ المبرهنة إنّ A و B مختلفتان. يقولها أوّل تمرينٍ في تدرّب: «النقطتان A و B نقطتان مختلفتان». والسبب واضحٌ إن جرّبت: لو كانت $A = B$ لصار $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ ، وأعطت كلّ قيمةٍ لـ t النقطة A نفسها، فتتكشف «المجموعة» إلى نقطةٍ واحدة ولا يكون هناك مستقيم. اقرأ المبرهنة وفي ذهنك $A \neq B$.

برهان الكتاب صفحة 67 سطران لا أكثر، وفيه فكرة واحدة: حوّل شرط المركز إلى المساواة الشعاعية التي تعرفها من المستوي، فنتج النقطتان ① و ② معاً بلا عملٍ إضافي.

$$(1 - t)\overrightarrow{AM} + t\overrightarrow{BM} = \vec{0}$$

1. ① اكتب شرط المركز كما هو القول إنّ M مركز الأبعاد متناسبة للنقطتين المثقلتين $(A, 1 - t)$ و (B, t) يعني بالتعريف هذه المساواة، ولا شيء غيرها. لاحظ اتجاه الشعاعين: الكتاب يكتب هنا $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BM}$ ، أي من النقطة المثقلة إلى M .

$$(1 - t)\overrightarrow{AM} + t\overrightarrow{BM} = \vec{0}$$

2. ② افتح القوس واقلب الشعاع الثاني افتح $(1 - t)\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} - t\overrightarrow{AM}$ ، واستعمل $\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{MB}$. انقل ما ليس فيه t إلى طرفٍ وحده.

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AM} + t\overrightarrow{MB}$$

3. ③ علاقة شال تجمع الشعاعين أخرج t عاملاً مشتركاً، فيبقى داخل القوس $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$ ، وهذا بعلاقة شال هو $\overrightarrow{AB}$. هنا انتهى البرهان: صار الشرط هو تعريف المستقيم نفسه.

$$\overrightarrow{AM} = t(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) = t\overrightarrow{AB}$$

4. ④ اقرأ النقطتين ① و ② من سطرٍ واحد الحساب لم يفترض شيئاً عن t ، فهو صالح لكل t حقيقي، وتلك هي ①. وإذا حصرت t في $[0, 1]$ صار الطرف الأيمن جزءاً من $\overrightarrow{AB}$ بين الصفر والكل، وتلك هي ②. برهانٌ واحدٌ لنقطتين.

$$t \in [0, 1] \iff M \in [AB]$$

t ليست عدداً غامضاً، بل نسبةً على المستقيم تُقرأ مباشرة: $t = 0$ تعطي A ، و $t = 1$ تعطي B ، و $t = \frac{1}{2}$ تعطي المنتصف. وكلّ t خارج $[0, 1]$ يعطي نقطةً على المستقيم خارج القطعة، وهذا هو الحال العام على المستقيم، لا استثناءً ولا خطأً حساباً.

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$$

انتبه: الكتاب يبذل اتجاه أشعته بين برهانٍ وآخر، وفي صفحة واحدة من الفرق. صفحة 67 تكتب

$$(1 - x - y)\overrightarrow{MA} + x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC} = \vec{0} \text{ ، و صفحة 68 تكتب } (1 - t)\overrightarrow{AM} + t\overrightarrow{BM} = \vec{0}$$

صحيحتان، وبينهما ضربٌ بـ -1 لا أكثر. لكن من يخلط بينهما في السطر نفسه يقلب إشارة واحدة ويخرج بنتيجة خاطئة. اختر في كلّ تمرينٍ اتجاهًا واحداً والتزمه إلى آخر السطر.

M مركز الأبعاد متناسبة للنقطتين $(A, -2)$ و $(B, 1)$. ما t التي تحقق $\overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB}$ ؟

كيف أبداً؟ المبرهنة تعمل بمعاملين مجموعهما 1 ، ومعاملات مجموعهما شيء آخر. أعد المعاملين إلى الصورة $(1 - t, t)$ قبل أن تقرأ t .

(أ) $t = 1$

(ب) $t = -1$

(ج) $t = \frac{1}{3}$

ب. نعم. اقسام المعاملين على مجموعهما -1 ، فتصير $(A, 2)$ و $(B, -1)$ ، أي $1 - t = 2$ و $t = -1$. ومعنى ذلك $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB}$ ، ف M على المستقيم من الجهة الأخرى لـ A ، خارج القطعة.

من معاملين منظمين إلى معاملين حريين

بعد البرهان يضع الكتاب ملاحظة صغيرة بجانب رسم مصباح، وهي أول قفزة حقيقية في الدرس. الصورة $(1 - t, t)$ مريحة للبرهان ومزعجة للحساب: في التمارين تُعطى المعاملات كما هي، $(A, 3)$ و $(B, 5)$ ، لا على صورة $1 - t$ و t . الملاحظة تحلّ ذلك بالتنظيم.

الملاحظة التي تلي البرهان

$\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta > 0$ القطعة $[AB]$ هي أيضاً مجموعة مراكز الأبعاد متناسبة للنقطتين المثلثتين (A, α) و (B, β) بهذه الشروط الثلاثة. لاحظ أنّ كلّ معاملي على حدة يجوز أن يكون معدوماً، والممنوع أن يكون المجموع معدوماً.

$t = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \in [0, 1]$ والسبب حساب واحد: مركز (A, α) و (B, β) هو نفسه مركز $(A, \frac{\alpha}{\alpha + \beta})$ و $(B, \frac{\beta}{\alpha + \beta})$ ، ومجموع هذين المعاملين 1 . فإذا سمّيت الثاني t كان الأول $1 - t$ ، وعُدنا إلى مبرهنة 1.

الكتاب، الصفحة 67

تذكّر: القسمة على $\alpha + \beta$ لا تُحرّك النقطة. هذه هي الحقيقة التي تحمل الملاحظة كلّها: ضرب جميع المعاملات في عدد غير معدوم يترك مركز الأبعاد متناسبة في موضعه. ولذلك يجوز لك دائماً أن تنظّم المعاملات حتّى يصير مجموعها 1 ، متى احتجت إلى قراءة t .

انتبه: احترس من الشرط الثالث، فهو الوحيد الذي لا يتعلّق بمعامل واحد بل بالمجموع. إذا كان $\alpha + \beta = 0$ فلا يوجد مركز أبعاد متناسبة أصلاً، ولا نقطة تحلّ المسألة: في الحالة $(A, 3)$ و $(B, -3)$ تصير المساواة $3\vec{MA} - 3\vec{MB} = \vec{0}$ ، أي $3\vec{BA} = \vec{0}$ ، وهي مستحيلة لأن $A \neq B$. تحقّق من المجموع قبل أن تبدأ الحساب، لا بعده.

انتبه: وهنا الفجّ الأكبر في الدرس كلّ، وهو فجّ إشارة واحدة. الملاحظة التي قرأتها الآن تسمح بـ $\alpha \geq 0$ و $\beta \geq 0$ ، أي بالمعامل المعلوم، وتصف القطعة. والنتيجة التي تأتي بعدها في السطر التالي تشترط $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ و $\gamma > 0$ ، موجبة تماماً، وتصف داخل المثلث. الكتاب لا يعلن هذا الانتقال في أيّ سطر، يحدث وأنت تنتقل بعينك من الملاحظة إلى النتيجة. من يحمل $\geq$ معه إلى النتيجة يصف المثلث مغلقاً، أي الداخل مع حدوده معاً، فيدخل في جوابٍ عن الداخل وحده نقاطاً واقعةً على الحدود. جرّب: $\gamma = 0$ يعطي نقطةً على $[AB]$ ، وهي ليست من الداخل.

من بُعدٍ واحد إلى بُعدين: داخل المثلث

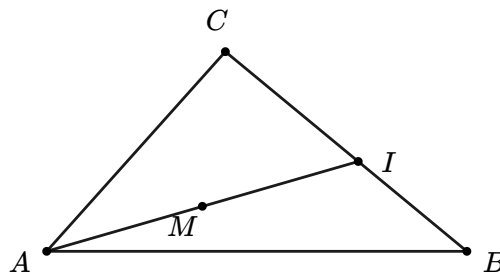
حتّى الآن كان كلّ شيء على مستقيم واحد. النتيجة الآتية تقفز إلى المستوي بنقطةٍ ثالثة، ومعها يظهر شكلٌ جديد: لا مستقيم ولا قطعة، بل مساحة. والشرط عليها هو الشرط الوحيد الذي يُكتب في هذا الدرس بعلامة $>$ لا $\geq$.

نتيجة 2

$\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ ليكن ABC مثلثاً، أي إنّ A و B و C ليست على استقامة واحدة، وليكن α و β و γ أعداداً موجبةً تماماً. الشرط على كلّ معاملٍ على حدة، وليس على المجموع وحده.

$\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \gamma \vec{MC} = \vec{0}$ إنّ داخل المثلث ABC هو مجموعة مراكز الأبعاد متناسبة للنقاط المثقّلة (A, α) و (B, β) و (C, γ) بهذه الشروط. والكلمة المهمّة هي «داخل»: الحدود ليست منه.

الكتاب، الصفحة 67



الرؤوس تحمل في الكتاب معاملاتهنّ: (A, α) و (B, β) و (C, γ) . والنقطة I على $[BC]$ هي مركز (B, β) و (C, γ) ، و M على $[AI]$ هي النقطة المطلوبة. الشكل كلّ هو البرهان مرسوماً.

برهان الكتاب صفحة 67 وأعلى صفحة 68، في اتجاهين. الأداة في الاتجاهين واحدة: الخاصّة التجميعيّة من الوحدة الأولى، تُستعمل مرّةً إلى الأمام ومرّةً إلى الخلف، ونقطةً وسيطةً واحدة تحمل الحساب كلّهُ.

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

1. ① اجمع نقطتين في نقطةٍ وسيطةٍ لتكن M مركزاً بهذه المعاملات، وسَمِّ I مركز (B, β) و (C, γ) . هي موجودةٌ لأنّ $\beta + \gamma > 0$ ، ومعاملها موجبان تماماً، فتقع I داخل القطعة $[BC]$ لا على أحد طرفيها.

$$\beta \overrightarrow{IB} + \gamma \overrightarrow{IC} = \vec{0}, \quad \beta + \gamma > 0$$

2. ② الخاصّة التجميعيّة تُنزل العدد من ثلاثة إلى اثنين بالخاصّة التجميعيّة تصير M مركز (A, α) و $(I, \beta + \gamma)$. والمعاملان موجبان تماماً، ف M داخل $[AI]$ لا على أحد طرفيها. وكلّ نقطةٍ من $[AI]$ عدا الطرفين تقع داخل المثلث، لأنّ A رأسٌ و I على الضلع المقابل؛ أمّا الطرفان نفسهما فعلى الحدود لا في الداخل. انتهى الاتجاه الأول.

$$\alpha \overrightarrow{MA} + (\beta + \gamma) \overrightarrow{MI} = \vec{0}$$

3. ③ وبالعكس: ابدأ من نقطةٍ داخل المثلث لتكن M نقطةً داخل المثلث. المستقيم (AM) يقطع (BC) في نقطةٍ واقعةٍ بين B و C ، وتقع M داخل $[AI]$. هذه خطوةٌ هندسيّةٌ بحتة، لا حساب فيها، وهي الشيء الوحيد الذي لا تعطيه الجبريّات.

$$M \in [AI], \quad I \in [BC]$$

4. ④ اقرأ المعاملات من الموضع لأنّ I بين B و C توجد بملاحظة المصباح معاملات $\beta > 0$ و $\gamma > 0$ تجعل I مركزهما، وهما موجبان تماماً لأنّ I ليست طرفاً. ولأنّ M داخل $[AI]$ يوجد $\alpha > 0$ يجعل M مركز (A, α) و $(I, \beta + \gamma)$.

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0$$

5. ⑤ التجميع نفسه، مقروءاً بالمقلوب استند إلى الخاصّة التجميعيّة مرّةً ثانية، لكن في الاتجاه الآخر: نقطتان تعودان ثلاثاً. فتكون M مركز (A, α) و (B, β) و (C, γ) بمعاملاتٍ موجبةٍ تماماً، وبذلك تمّ الاحتواء الثاني وتمّت المساواة بين المجموعتين.

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

النقطة I هي كلّ الحكاية. الخاصّة التجميعيّة لا تعرف المثلثات، تعرف فقط أن تُبدل بمجموعةٍ من النقاط نقطةً واحدةً بمعاملٍ هو مجموع معاملاتنا. والهندسة تدخل في موضعٍ واحد: أنّ معاملين موجبين تماماً يضعان المركز بين النقطتين لا خارجهما.

$$(I, \beta + \gamma)$$

انتبه: الاتجاه الأول وحده ليس برهاناً للنتيجة. النتيجة تقول إن مجموعتين متساويتان، والمساواة تحتاج احتواءين: أن يقع كل مركزٍ بمعاملاتٍ موجبة داخل المثلث، وأن يكتب كل نقطةٍ داخل المثلث على تلك الصورة. الكتاب يكتب الثاني بكلمة «وبالعكس» ولا يستغني عنه. من يبرهن الأول ويتوقف قد أثبت نصف النتيجة، ونصف مساواةٍ بين مجموعتين ليس شيئاً.

سمحت في نتيجة 2 لمعامل واحد بأن يكون معدوماً، مثلاً $\gamma = 0$ مع $\alpha > 0$ و $\beta > 0$. أين تقع M حينئذ؟
كيف أبدأ؟ المعامل المعلوم يلغي دور نقطته. اكتب شرط المركز بعد وضع $\gamma = 0$ وانظر كم نقطة بقيت فيه، ثم أعد قراءة الملاحظة التي تخصّ نقطتين.

(أ) على حدود المثلث، في القطعة $[AB]$

(ب) في الداخل كما هي، فمعامل معدوم لا يغيّر شيئاً

(ج) لا توجد M ، لأن المعاملات لم تعد كلها موجبة

أ. نعم. يبقى $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ بمعاملين موجبين، ف M على $[AB]$ ، أي على الحدود لا في الداخل. وهذا بعينه سبب وجود $>$ في النتيجة بدل $\geq$.

المستويات في الفراغ

يفتح الكتاب القسم الثاني بتذكير لا برهان: المستوي (ABC) هو مجموعة النقاط M التي تحقق
 $\overrightarrow{AM} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC}$ حيث x و y عدنان حقيقيّان كيفيّان. هذا معروف من الوحدة الأولى. ومبرهنة 3 تفعل
 بهذه المساواة ما فعلته مبرهنة 1 بالمستقيم: تكتبها بلغة مركز الأبعاد المتناسبة، لا أكثر ولا أقل.

مبرهنة 3

$(1 - x - y) + x + y = 1$ لتكن A و B و C ثلاث نقاطٍ تعيّن مستويّاً، أي ليست على استقامة واحدة، وليكن x و y عددين حقيقيّين كيفيّين، بلا أي شرطٍ على الإشارة. مجموع المعاملات الثلاثة يساوي 1 دائماً، فالمركز موجودٌ لكل x و y .

$(1 - x - y)\overrightarrow{MA} + x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ إنَّ انتماء M إلى المستوي (ABC) يكافئ وجود عددين x و y يجعلان M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(A, 1 - x - y)$ و (B, x) و (C, y) .

الكتاب، الصفحة 68

برهان الكتاب صفحة 68. الأداة علاقة شال وحدها، والفكرة أن تُقحم M في الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ حتى تصير كل الأشعة بادئةً من M .

$$\overrightarrow{AM} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC}$$

1. ① أقحم M في كل شعاعٍ يمينٍ المساواة بعلاقة شال يمرّ كلٌّ من الشعاعين بـ M ، فهذه واحدةٌ ومثلها

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}$. عوّض بهما في الطرف الأيمن، فتصير المساواة

$\overrightarrow{AM} = x(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) + y(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC})$ ، وتظهر $\overrightarrow{AM}$ في الطرفين.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$$

2. ② وخذ اتجاه الأشعة عند M اجمع الحدود التي فيها $\overrightarrow{AM}$ واستعمل $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{MA}$ حتى تبدأ كل الأشعة من M .

هذه الخطوة سبب ظهور $\overrightarrow{MA}$ في صفحة 68 بعد أن كان صفحة 67 يكتب $\overrightarrow{AM}$.

$$-\overrightarrow{MA} = -(x + y)\overrightarrow{MA} + x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC}$$

3. ③ انقل كل شيء إلى طرفٍ واحد اجمع حدّي $\overrightarrow{MA}$ في مكانٍ واحد، فيخرج معاملها $1 - x - y$ من تلقاء نفسه. لم نختر هذا المعامل، الحساب أعطاه.

$$(1 - x - y)\overrightarrow{MA} + x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

4. ④ اقرأ السطر الأخير هذا بالتعريف يقول إنّ M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(A, 1 - x - y)$ و (B, x) و (C, y) . وكلّ خطوة من الخطوات الثلاث كانت تكافؤاً، فالبرهان يمضي في الاتجاهين معاً بلا عملٍ ثانٍ.

$$M \in (ABC) \iff (A, 1 - x - y), (B, x), (C, y)$$

المعاملان x و y يجوز أن يكونا سالبيين، وهذا هو الفرق كلّ بين المستوي وداخل المثث: المستوي لا يشترط إشارة، وداخل المثث يشترط ثلاث إشارات موجبة تماماً. وبينهما القطعة والحدود بالمعاملات غير السالبة. أشكالٌ ثلاثة، ولغةٌ واحدة، والفرق في الإشارة.

$$x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}$$

انتبه: لا تقرأ x و y إحداثياتٍ لنقطة. هما معاملان، جاءا من التفكيك $\overrightarrow{AM} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC}$ ، ولا علاقة لهما بأيّ معلومٍ ولا بأيّ محور. ومن كتب المعامل الأول 1 بدل $1 - x - y$ كسر الشرط الذي يحمل المبرهنة كلّها: المجموع يجب أن يبقى 1 . التحقّق يكلف سطرًا واحداً، $(1 - x - y) + x + y = 1$.

M في المستوي (ABC) وتحقق $\vec{AM} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC}$. ما معاملات A و B و C ؟

كيف أبدأ؟ المبرهنة تعطي المعاملات الثلاثة بصيغة جاهزة بدلالة x و y . اقرأ x و y من المساواة بإشارتيهما، ثم احسب المعامل الأول، ولا تنس التحقق من المجموع.

(أ) $(A, 1)$ و $(B, 2)$ و $(C, -3)$

(ب) $(A, 2)$ و $(B, 2)$ و $(C, -3)$

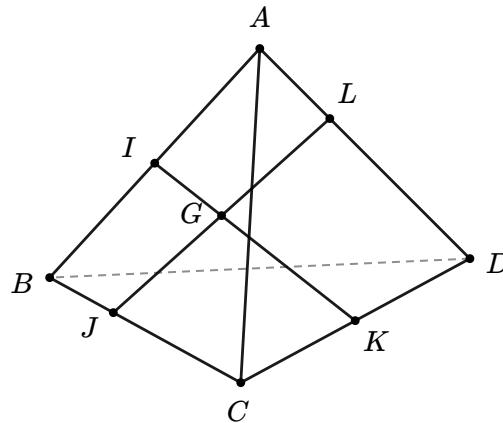
(ج) $(A, 2)$ و $(B, -3)$ و $(C, 2)$

ب. نعم. $x = 2$ و $y = -3$ ، فالمعامل الأول $2 = 3 - 2 + 1$ ، والمجموع $1 = 2 - 3 + 2$ كما يجب.
والمعامل السالب لا يضّر: المبرهنة لا تشترط إشارة.

مثالا الكتاب: التجميع مرتين، والمعامل الذي يُفكك

حلّ المثالين في صفحتي 68 و 69 لا يقوم على مبرهنة 1 ولا على مبرهنة 3، بل على الخاصّة التجميعيّة وحدها، ومعها ملاحظتان يضعهما الكتاب بجانب مصباح، وهما الاستراتيجيّة كلّها. ونحن نسّمّي في الحلّ أدناه المبرهنة التي تُجيز كلّ قراءة للمعاملات، لأنّ تسميتها تعلّم، لكنّها ليست خطوةً في برهان الكتاب.

تذكّر: لإثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة يكفي إثبات أنّ إحداها مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين الآخرين. ولإثبات وقوع أربع نقاط في مستوٍ واحد يكفي إثبات أنّ إحداها مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط الثلاث الأخرى. جملتان متشابهتان، وفرقهما عدّد واحد: نقطتان تعيّنان مستقيماً، وثلاث تعيّن مستوياً.



رباعي الوجوه $ABCD$: I منتصف $[AB]$ و K منتصف $[CD]$ ، و L على $[AD]$ بحيث $\vec{AL} = \frac{1}{3}\vec{AD}$ ، و J على $[BC]$ بحيث $\vec{CJ} = \frac{2}{3}\vec{CB}$ ، و G منتصف $[JK]$. القطعة $[IK]$ مرسومة لأنّ G تقع عليها، وذلك هو المطلوب.

انتبه: في نص الكتاب المطبوع صفحة 68 ترتيب الحروف مخالف للشكل: مكتوب « K و I منتصفا الحرفين $[AB]$ و $[CD]$ »، أي K أولاً، وكلمة «بالترتيب» غائبة. لكن الشكل والحل المطبوعين معاً يجعلان I منتصف $[AB]$ و K منتصف $[CD]$ ، وهذا ما نتبعه. القاعدة العامة: في مثل هذه التعدادات قابل النص بالشكل قبل أن تحسب. وفي المثال الثاني صفحة 69 تظهر كلمة «بالترتيب»، وهناك يلتزم الترتيب كما هو.

المثال الأول، صفحة 68 وأعلى صفحة 69: $ABCD$ رباعي وجوه، والمطلوب إثبات أن G و I و K تقع على استقامة واحدة. الفكرة التي تحمل الحل كله: عائلة واحدة من أربع نقاط مثقلة، تُجمَع مرتين بطريقتين مختلفتين.

$$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$$

1. ① **ترجم شرط L إلى معاملين** من $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ نقرأ $t = \frac{1}{3}$ على المستقيم (AD) ، ومبرهنة 1 تعطي المعاملين $t = \frac{1}{3}$ و $1 - t = \frac{2}{3}$. اضرب المعاملين في 3 فيصيران عددين صحيحين، ف L مركز $(A, 2)$ و $(D, 1)$.

$$2\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LD} = \vec{0}$$

2. ② **وترجم شرط J بالطريقة نفسها على المستقيم (CB)** تقول $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ إن $t = \frac{2}{3}$ ، فالمعاملان $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ ل C و B . اضرب في 3، ف J مركز $(C, 1)$ و $(B, 2)$.

$$\overrightarrow{JC} + 2\overrightarrow{JB} = \vec{0}$$

3. ③ **اخترع النقطة التي تجمعهما** ضع نقطة مساعدة G' هي مركز الأبعاد متناسبة للنقاط الأربع مجتمعة بالمعاملات التي ظهرت: $(A, 2)$ و $(D, 1)$ و $(C, 1)$ و $(B, 2)$. مجموع المعاملات 6، وهو غير معدوم، ف G' موجودة ووحيدة. هذه الخطوة هي الاختراع الوحيد في الحل، وما بعدها حساب.

$$2 + 1 + 1 + 2 = 6 \neq 0$$

4. ④ **التجميع الأول:** $G' = G$ اجمع $(A, 2)$ مع $(D, 1)$ فتحصل على $(L, 3)$ ، واجمع $(C, 1)$ مع $(B, 2)$ فتحصل على $(J, 3)$. معاملان متساويان يعنيان المنتصف، ف G' منتصف $[LJ]$ ، وهي بالفرض G .

$$\overrightarrow{G'L} + \overrightarrow{G'J} = \vec{0}$$

5. ⑤ **التجميع الثاني للعائلة نفسها** لا تُغيّر معاملاً ولا نقطة، غير الأزواج فقط: $(A, 2)$ مع $(B, 2)$ تعطيان $(I, 4)$ لأن I منتصف $[AB]$ ، و $(C, 1)$ مع $(D, 1)$ تعطيان $(K, 2)$ لأن K منتصف $[CD]$.

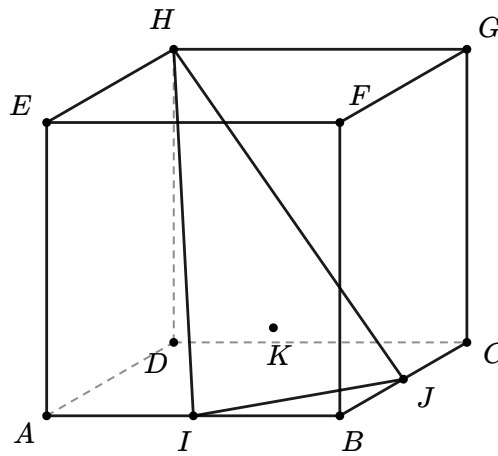
$$4\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GK} = \vec{0}$$

6. عُدّ النقاط الباقية بقيت نقطتان، I و K ، و G مركزهما. وذلك بالتعريف يعني أنّ G على المستقيم (IK) ، أي أنّ النقاط الثلاث على استقامة واحدة. وتنظيم المعاملين يعطي الموضع أيضاً: $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IK}$.

$$\overrightarrow{IG} = \frac{2}{6}\overrightarrow{IK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IK}$$

العائلة واحدة والتجميع اثنان، وهذا هو كلّ الحلّ. إن لم يُعطِ تجميعٌ شيئاً فابحث عن غيره ولا تتوقّف: لأربع نقاطٍ ثلاث طرقٍ للتقسيم إلى زوجين، وأربع طرقٍ لعزل نقطةٍ عن ثلاث. وما يُمنع هو تغيير المعاملات، فذلك يُنتج نقطةً أخرى ولا يُثبت شيئاً عن G .

$$(A, 2), (B, 2), (C, 1), (D, 1)$$



المكعب $ABCDEFGH$: I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[BC]$ ، والمثلث IJH مرسومٌ لأنّه يعيّن المستوي المطلوب، و K تقع داخله. شكل الكتاب يضع أيضاً نقطة L على $[IJ]$ ، وهي لا ترد في نص التمرين ولا في حلّه، فلم نرسمها هنا.

المثال الثاني، صفحة 69: $ABCDEFGH$ مكعب، و K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, 1)$ و $(B, 2)$ و $(C, 1)$ و $(H, 1)$. والمطلوب إثبات وقوع I و J و K و H في مستوٍ واحد. الجديد فيه خطوة واحدة تبدو ممنوعةً وهي مسموحة.

$$\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KH} = \vec{0}$$

1. اكتب ما تعرفه عن المنتصفين المنتصف هو مركزٌ بمعاملين متساويين، ف I مركز $(A, 1)$ و $(B, 1)$ ، و J مركز $(B, 1)$ و $(C, 1)$. لاحظ أنّ B تظهر في الاثنين، وهذه ملاحظةٌ تقرّر الخطوة التالية.

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}, \quad \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$$

2. فكَّك معامل B إلى معاملين معامل B هو 2 ، وتحتاج B في تجميعين مختلفين، فاكتب $(B, 2)$ على صورة $(B, 1)$ و $(B, 1)$. الكتاب يطبع القائمة بخمس نقاطٍ مثقَّلة على هذه الصورة بالضبط. التفكيك لا يحرك K لأنَّ مجموع المعاملات لم يتغيَّر.

$$(A, 1), (B, 1), (B, 1), (C, 1), (H, 1)$$

3. اجمع كلَّ زوجٍ في منتصفه $(A, 1)$ مع $(B, 1)$ تعطيان $(I, 2)$ ، و $(B, 1)$ مع $(C, 1)$ تعطيان $(J, 2)$ ، وتبقى $(H, 1)$ وحدها. المجموع $5 = 2 + 2 + 1$ ، وهو مجموع المعاملات الأصليَّة نفسه، فالنقطة لم تتغيَّر.

$$2\overrightarrow{KI} + 2\overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{KH} = \vec{0}$$

4. عُدَّ النقاط الباقية، ثلاثٌ هذه المرَّة بقيت ثلاث نقاط، I و J و H ، و K مركزها. وبمبرهنة 3 هذا يعني أنَّ K تنتمي إلى المستوي (IJH) ، فالنقاط I و J و K و H في مستوٍ واحد. ولاحظ الفرق عن المثال الأوَّل: هناك بقيت نقطتان فكانت استقامة، وهنا بقيت ثلاثٌ فكان استواء.

$$K \in (IJH)$$

تفكيك معاملٍ إلى مجموع معاملين خطوة مسموحة، والكتاب يطبعها صريحاً. الشرط الوحيد أن يبقى مجموع المعاملات كما هو، وحينئذ لا تتحرَّك النقطة قيد شعرة. وهي الخطوة التي تجعل نقطةً واحدة تخدم تجميعين، وبها وحدها ظهر المنتصفان معاً.

$$(B, 2) = (B, 1), (B, 1)$$

في المثال الأوَّل جمعت العائلة مرَّةً فخرجت G . لماذا لا يكفي هذا التجميع وحده لإثبات الاستقامة؟

كيف أبدأ؟ أسأل ماذا أعطاك التجميع الأوَّل بالضبط، وماذا تريد أن تثبته. المطلوب علاقةٌ بين ثلاث نقاطٍ اسمها G و I و K ، فانظر أي هذه الحروف ظهر في تجميعك الأوَّل.

أ) لأنَّ مجموع المعاملات في التجميع الأوَّل ليس 1

ب) لأنَّ إثبات الاستقامة يحتاج أربع نقاطٍ باقية

ج) لأنَّ التجميع الأوَّل لم يُظهر I ولا K أصلاً

ج. نعم. التجميع الأوَّل أعطى $(L, 3)$ و $(J, 3)$ ، أي عرَّف G فقط. والنقطتان I و K لا تظهران إلَّا في تجميعٍ ثانٍ للعائلة نفسها، وهو الذي يربط الثلاث.

المصدر: الرياضيات، الجزء الثاني، الصفحات 67 إلى 70 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.