الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

لوغاريتم جداء ضرب

بسيطة

خاصّةٌ واحدة تحوّل الضرب إلى جمع، ومنها تُشتقّ كلّ قواعد الحساب في هذه الوحدة

التابع اللّوغاريتمي . الوحدة 5 . الدرس 2

في الدرس السابق عرفنا التابع بشرطين، ولم نعرف كيف نحسب به. هنا تأتي الخاصّة التي تجعله أداةً حقيقيّة: لوغاريتم الجداء هو مجموع اللوغاريتمين. هذه الجملة القصيرة هي سبب اختراع اللوغاريتمات أصلاً، إذ كانت تختصر ضرب أعدادٍ كبيرة إلى جمعٍ بسيط قبل ظهور الآلات الحاسبة. ومنها وحدها تُشتقّ القواعد الأربع الباقية: لوغاريتم الكسر، ولوغاريتم المقلوب، ولوغاريتم القوّة، ولوغاريتم الجذر. احفظ واحدة، تملك خمساً. لكن انتبه من الآن: كلّ هذه القواعد مشروطة بأنّ الأعداد موجبة تماماً، ومن أهملَ الشرط حصل على مساواةٍ تبدو صحيحة وهي خاطئة.

الخاصّة الأساسيّة: الضرب يصير جمعاً

مبرهنة 2

$\ln(a\cdot b)=\ln a+\ln b$ أيّاً يكن العددان $a>0$ و $b>0$. الشرط على الطرفين، لا على الجداء وحده.

الكتاب، الصفحة 139

وبرهان الكتاب أنيق، ويستعمل أداةً واحدة من وحدة الاشتقاق: تابعٌ مشتقّه معدوم على مجالٍ هو تابعٌ ثابت عليه. نثبّت a ونبني تابعاً يقيس الفرق بين الطرفين.

برهان الكتاب على الصفحة 139 . الفكرة أنّنا لا نحسب الطرفين، بل نُثبت أنّ فرقهما لا يتغيّر، ثمّ نقيسه عند نقطةٍ واحدة مريحة.

$$f(x)=\ln(ax)-\ln a-\ln x$$

1. التابع الذي نبنيه نثبّت $a>0$ ونعرّف f على $\mathbb{R}_+^*$ بالفرق بين الطرفين. إن أثبتنا أنّه معدوم دائماً، فقد أثبتنا المساواة.

$$f(x)=\ln(ax)-\ln a-\ln x$$

2. اشتقاقه التابع f اشتقاقيٌّ على $\mathbb{R}_+^*$. المشتق الأوّل من الاشتقاق المركّب: مشتق $\ln(ax)$ هو a مضروباً في $\dfrac{1}{ax}$ ، والحدّ الأوسط ثابت فمشتقّه صفر.

$$f'(x)=a\times\frac{1}{ax}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=0$$

3. إذن التابع ثابت مشتقّه معدوم على المجال كلّه، فهو ثابتٌ عليه. ولمعرفة قيمة هذا الثابت يكفي أن نحسبه عند نقطةٍ واحدة، ونختار الأسهل، أي $x = 1$.

$$f(1) = \ln a - \ln a - \ln 1 = 0$$

4. الخلاصة الثابت صفر، إذن $f(x) = 0$ عند كلّ x موجب تماماً. وباختيار $x = b$ نحصل على المطلوب.

$$\ln(ab) - \ln a - \ln b = 0$$

لإثبات مساواةٍ بين تابعين على مجال: أثبت أنّ فرقهما مشتقّه معدوم، ثمّ احسب الفرق عند نقطةٍ واحدة. هذه حيلةٌ عامّة وليست خاصّةً باللوغاريتم.

$$\left(\forall x \in I,\ f'(x) = 0\right),\ f(x_0) = 0 \implies \left(\forall x \in I,\ f(x) = 0\right)$$

انتبه: لا تعمّم في الاتّجاه الخطأ. الخاصّة تقول شيئاً عن الجداء ولا تقول شيئاً عن المجموع: $\ln(a+b)$ لا يساوي $\ln a + \ln b$ ، وجرّبها بـ $a = b = 1$ فيصير الطرف الأيسر $\ln 2$ والأيمن صفراً. وكذلك الطرف الأيمن مجموعٌ لا جداء: $\ln(ab)$ ليس $\ln a \times \ln b$.

أيّ المساواتين الآتيتين صحيحة عند كلّ $a > 0$ و $b > 0$ ؟

> **كيف أبدأ؟** ابدأ من نصّ المبرهنة: أيّ عمليّةٍ تقع داخل اللوغاريتم فيها، وأيّ عمليّةٍ تقع بين اللوغاريتمين خارجه؟ قابل كلّ سطرٍ بهذا الانتقال، ثمّ اختبر ما بقي مشكوكاً فيه بوضع $a = 1$ ، متذكّراً أنّ $\ln 1 = 0$.

أ) $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$
ب) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
ج) $\ln(ab) = \ln a \times \ln b$

ب. نعم، وهذه هي الخاصّة الأساسيّة. الجداء في الداخل يصير مجموعاً في الخارج.

أربع نتائج، كلّها من الخاصّة نفسها

لا شيء ممّا يأتي قاعدةٌ جديدة تُحفظ وحدها. كلّها تخرج من المبرهنة السابقة في سطرٍ أو سطرين، ومعرفة الطريق أنفع من حفظ النتيجة.

لوغاريتم كسر ولوغاريتم مقلوب

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ لأنّ $a = \frac{a}{b} \cdot b$ ، فبتطبيق الخاصّة على هذا الجداء نجد $\ln a = \ln \frac{a}{b} + \ln b$.

$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$ الحالة الخاصّة $a = 1$ من السطر الذي فوقه، لأنّ $\ln 1 = 0$.

الكتاب، الصفحة 139

لوغاريتم جداء عدّة أعداد، ولوغاريتم قوّة

$\ln(a_1 \cdot a_2 \cdots a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n$ بالتدريج على العدد n ، وكلّ الأعداد موجبة تماماً. هنا تلتقي هذه الوحدة بوحدة البرهان بالتدريج.

$\ln(a^n) = n \ln a$ يكفي أن نضع $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$ في السطر السابق، مع $n \in \mathbb{N}^*$.

$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$ من $\ln b^2 = 2 \ln b$ بوضع $b = \sqrt{a}$ ، إذ $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

الكتاب، الصفحة 140

انتبه: ثلاثة أخطاء تتكرّر هنا كلّ عام، وكلّها من النوع نفسه: نقل العمليّة كما هي بدل تحويلها. $\ln \frac{a}{b}$ ليس $\frac{\ln a}{\ln b}$ ، و $\ln(a^n)$ ليس $(\ln a)^n$ ، و $\ln \sqrt{a}$ ليس $\sqrt{\ln a}$. في الثلاثة تنزل العمليّة درجةً واحدة: القسمة تصير طرحاً، والقوّة تصير ضرباً، والجذر يصير قسمةً على اثنين.

بسّط كتابة العدد $a = \ln 3 + \ln \frac{1}{3}$.

كيف أبدأ؟ لا تحسب كلّ حدٍّ على حدة. أمامك طريقان: إمّا سطر لوغاريتم المقلوب في صندوق النتائج، فيربط $\ln \frac{1}{3}$ بـ $\ln 3$ في خطوةٍ واحدة، وإمّا أن تقرأ الخاصّة الأساسيّة بالاتّجاه المعاكس، من المجموع إلى الجداء، فتنظر أيّ عددٍ يظهر داخل اللوغاريتم حينئذٍ.

أ) $a = 2 \ln 3$

ب) $a = \ln 3 - 3$

ج) $a = 0$

ج. نعم. بطريقتين: إمّا $\ln \frac{1}{3} = -\ln 3$ ، وإمّا مباشرةً $\ln\left(3 \times \frac{1}{3}\right) = \ln 1 = 0$.

الفخّ الأكبر: لماذا لا تصحّ المساواة على كامل المستقيم

لماذا لا تصحّ المساواة $\ln(x^2) = 2\ln x$ على $\mathbb{R}$ ؟ لأنّ الخاصّة الأساسيّة صحيحة فقط على مجموعة الأعداد الموجبة تماماً، والطرف الأيسر معرّف عند كلّ x غير معدوم بينما الطرف الأيمن يشترط $x > 0$.

ولحساب $\ln(x^2)$ على مجموعة تعريفه كلّها نكتب المربّع بصورةٍ تحفظ الإيجاب: $x^2 = x \times x = |x| \times |x|$ ، وهذان عاملان موجبان تماماً عند كلّ $x \neq 0$.

$$\ln(x^2) = \ln(|x| \cdot |x|) = \ln|x| + \ln|x| = 2\ln|x|$$

الحالتان

$x > 0 \implies \ln(x^2) = 2\ln x$ لأنّ $|x| = x$.

$x < 0 \implies \ln(x^2) = 2\ln(-x)$ لأنّ $|x| = -x$ ، وهو موجبٌ تماماً هنا. لاحظ أنّ $-x$ ليس عدداً سالباً.

الكتاب، الصفحة 140

تذكّر: الصيغة الجامعة $\ln(x^2) = 2\ln|x|$ صحيحة عند كلّ $x \neq 0$ وتغنيك عن الحالتين. وهي تعمّم إلى كلّ قوّةٍ زوجيّة.
هذا هو الموضع الذي يخسر فيه الطلّاب أكثر ما يخسرون في هذه الوحدة، لأنّ الجواب الناقص يبدو صحيحاً تماماً.

احسب $\ln(x^2)$ عند $x = -5$.

كيف أبدأ؟ الخطوة الأولى عدديّة لا قاعديّة: ما العدد الذي يقع فعلاً داخل اللوغاريتم عند $x = -5$ ، وما إشارته؟ هذا وحده يحسم مسألة التعريف. ثمّ عُد إلى صندوق الحالتين واقرأ السطر الذي شرطه $x < 0$ بحرفه، ناظراً إلى ما كُتب داخل اللوغاريتم فيه.

أ) $2\ln 5$
ب) $2\ln(-5)$
ج) غير معرّف

أ. نعم، لأنّ $|-5| = 5$ ، فيكون $2\ln 5 = \ln 25$. والتحقّق مباشر: $(-5)^2 = 25$.

تابعان متساويان في الصيغة، مختلفان في التعريف

وللفخّ نفسه صورةٌ ثانية يعرضها الكتاب. تأمّل التابعين $f : x \mapsto \ln(x^2 - 1)$ و $g : x \mapsto \ln(x+1) + \ln(x-1)$. القاعدة الأساسيّة توحي بأنّهما التابع نفسه، لأنّ $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$. وهذا غير صحيح.

المجموعتان

$D_f = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ شرطٌ واحد: $x^2 - 1 > 0$. ويتحقّق أيضاً عندما يكون العاملان سالبين معاً.

$D_g =]-1, +\infty[\cap]1, +\infty[=]1, +\infty[$ شرطان منفصلان: $x + 1 > 0$ و $x - 1 > 0$ ، ولا بدّ من تحقّقهما معاً.

الكتاب، الصفحة 140

تذكّر: نستنتج أنّ f و g غير متساويين، لاختلاف مجموعتي تعريفهما. ولكن مهما كانت x من $D_f \cap D_g =]1, +\infty[$ كان $f(x) = g(x)$. أي أنّ القاعدة لم تكذب، بل ضيّقت المجال.

انتبه: احفظ الاتّجاه: تفكيك اللوغاريتم إلى مجموع يُصغّر مجموعة التعريف أو يُبقيها، ولا يوسّعها أبداً. لذلك يُحسب مجال التعريف من الصيغة الأصليّة قبل أيّ تفكيك، لا بعده. الفرق هنا هو المجال $]-\infty, -1[$ كاملاً، وهو نصف الجواب.

مثالان محلولان: معادلة ومتراجحة

نجمع الآن قواعد هذا الدرس مع طريقة الدرس السابق. المفتاح في الاثنين واحد: نوحّد الطرفين في لوغاريتمٍ واحدٍ على كلّ جهة، ثمّ نتخلّص منهما، ثمّ نعرض النتيجة على مجموعة التعريف.

المثال الأوّل من الكتاب، الصفحتان 140 و 141 . المطلوب مجموعة حلول المعادلة، وفيها جذرٌ تربيعيٌّ ومعاملٌ كسريّ، فتظهر ثلاث قواعد من هذا الدرس دفعةً واحدة.

$$\ln \sqrt{2x - 3} = \ln(6 - x) - \frac{1}{2} \ln x$$

1. مجموعة التعريف أوّلاً ثلاثة شروط في آنٍ معاً: $2x - 3 > 0$ و $6 - x > 0$ و $x > 0$. الشرط الثالث يتبع الأوّل، فيبقى مجالٌ واحد.

$$D = \left]\tfrac{3}{2}, 6\right[$$

2. توحيد الكتابة نستعمل $\ln \sqrt{u} = \frac{1}{2} \ln u$ على اليسار، ثمّ نضرب الطرفين في 2 ، ثمّ ننقل $\ln x$ إلى اليسار.

$$\ln(2x - 3) + \ln x = 2 \ln(6 - x)$$

3. لوغاريتم واحد على كلّ جهة المجموع على اليسار يصير لوغاريتم جداء، والمعامل 2 على اليمين يصير أُسّاً. الآن الطرفان لوغاريتمان، فيمكن حذفهما.

$$\ln\big(2x^2-3x\big)=\ln\big((6-x)^2\big)$$

4. الحلّ في $\mathbb{R}$ نساوي ما داخل اللوغاريتمين وننشر المربّع: $2x^2-3x=36-12x+x^2$ ، ثمّ نجمع الحدود.

$$x^2+9x-36=0 \iff (x+12)(x-3)=0$$

5. العرض على مجموعة التعريف للمعادلة الجبريّة حلّان. الأوّل سالب فهو خارج D بوضوح، والثاني داخلها. وللتحقّق عند $x=3$: الطرف الأيسر $\ln\sqrt{3}$ ، والأيمن $\ln 3-\frac{1}{2}\ln 3$ ، وكلاهما $\frac{1}{2}\ln 3$.

$$x_1=-12\notin D,\quad x_2=3\in D,\quad \mathcal{S}_E=\{3\}$$

رتّب الخطوات دائماً هكذا: مجموعة التعريف، ثمّ توحيد الطرفين في لوغاريتمٍ واحد، ثمّ حذف اللوغاريتمين، ثمّ العرض على المجموعة. من بدّل الترتيب خسر إمّا حلّاً أو درجة.

$$A>0,\ B>0 \implies (\ln A=\ln B \iff A=B)$$

المثال الثاني من الكتاب، وهو متراجحة. لاحظ أنّ المعامل 2 هنا في الطرف الأيمن، فيصير أُسّاً كما في المثال السابق تماماً.

$$\ln\big(x^2-3x\big)\geq 2\ln(6-x)$$

1. مجموعة التعريف شرطان: $6-x>0$ أي $x<6$ ، و $x^2-3x>0$ أي $x<0$ أو $x>3$. والتقاطع مجالان لا مجال واحد.

$$D'=\,]-\infty,0[\,\cup\,]3,6[$$

2. توحيد الطرفين المعامل 2 يدخل أُسّاً، فيصير الطرفان لوغاريتمين ويمكن مقارنة ما بداخلهما مباشرة، لأنّ التابع متزايدٌ تماماً.

$$\ln\big(x^2-3x\big)\geq\ln\big((6-x)^2\big)$$

3. الحلّ في $\mathbb{R}$ ننشر المربّع ونختصر: $x^2-3x\geq 36-12x+x^2$. يختفي الحدّ من الدرجة الثانية من الطرفين، فتبقى متراجحة من الدرجة الأولى.

$$9x\geq 36 \iff x\geq 4$$

4. التقاطع مع مجموعة التعريف نحتفظ من $[4,+\infty[$ بما ينتمي إلى D' . المجال $]-\infty,0[$ لا يلتقي به، ويبقى الجزء الأيمن حتّى الحدّ 6 من دونه.

$$\mathcal{S}_I=[4,6[$$

ولاحظ اختصار الكتاب: المتراجحة محقّقة إذا وفقط إذا تحقّق $x < 6$ مع $x^2 - 3x \geq (6 - x)^2$ ، لأنّ الشرط الأوّل والمتراجحة معاً يجعلان $x^2 - 3x > 0$ محقّقاً بطبيعة الحال. هذا هو التعليل نفسه الذي رأيته في الدرس السابق.

$$x < 6,\ x^2 - 3x \geq (6 - x)^2 \implies x^2 - 3x > 0$$

تذكّر: قواعد هذا الدرس هي أكثر ما يظهر في البكالوريا من الوحدة كلّها، لأنّها تدخل في كلّ مسألةٍ لاحقة: في الاشتقاق، وفي النهايات، وفي دراسة التوابع. أتقنها الآن، فما بعدها يبني عليها ولا يعيدها.

المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 139 إلى 142 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.