الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

دراسة التابع اللّوغاريتمي ln

النهايتان عند الطرفين، ومنهما يخرج التقابل، ومن التقابل يولد العدد النيبري

التابع اللّوغاريتمي . الوحدة 5 . الدرس 3

بسيطة

حقّ الآن نعرف عن التابع اللّوغاريتمي أنّه متزايد تماماً وأنّه ينعدم عند الواحد، لكنّنا لا نعرف إلى أين يذهب. هل يصعد بلا حدّ أم يستقرّ عند سقفٍ ما؟ وماذا يفعل قرب الصفر؟ الجواب عن هذين السؤالين يغيّر كلّ شيء: إذا كان يأخذ كلّ القيم من ناقص اللانهاية إلى زائد اللانهاية، ولا يأخذ أيّ قيمة مرّتين، فإنّ المعادلة $\ln x = m$ لها حلٌّ وحيد مهما كان m . ولهذا الحلّ اسمٌ سنستعمله في كلّ ما بقي من العام، ومنه يولد أشهر عددٍ في التحليل الرياضي.

إلى أين يذهب اللوغاريتم؟

مبرهنة

$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ يصعد بلا حدّ، وإن كان صعوده بطيئاً جدّاً.

$\lim_{x\to 0,\ x>0} \ln x = -\infty$ وينزل بلا حدّ قرب الصفر. الشرط $x > 0$ مكتوبٌ هنا عن قصد: التابع غير موجودٍ على يسار الصفر، فلا معنى لنهايةٍ من الجهتين.

الكتاب، الصفحة 143

والبرهان الأوّل جميلٌ لأنّه لا يستعمل شيئاً جديداً. المطلوب أن نُثبت أنّه مهما كبر العدد الموجب M نجد عدداً A يجعل $\ln x \geq M$ بمجرّد انتماء x إلى المجال $]A, +\infty[$. والحيلة أن نبني A من قوى العدد 2 .

برهان الكتاب على الصفحة 143 . خُذ عدداً موجباً M مهما كان كبيراً، والمطلوب أن نجد الحدّ A الذي يتجاوز عنده الخطّ البياني كلّ ما هو تحت M .

$$\ln x \geq M$$

1. اختيار العدد الطبيعيّ نختار عدداً طبيعيّاً موجباً تماماً n أكبر من $\dfrac{M}{\ln 2}$. وهذا ممكنٌ دائماً، مهما كبر M ، لأنّ الأعداد الطبيعيّة لا تنتهي.

$$n > \frac{M}{\ln 2}$$

2. ضربٌ في عددٍ موجب بما أنّ $2 > 1$ فإنّ $\ln 2 > 0$ ، والضرب في عددٍ موجب لا يقلب المتراجحة. ثمّ نستعمل قاعدة لوغاريتم القوّة من الدرس السابق.

$$n \ln 2 = \ln(2^n) > M$$

3. تعريف الحدّ نعرّف A بأنّه هذه القوّة نفسها. الآن صار عندنا عددٌ لوغاريتمه أكبر من M ، وهذا هو نصف المطلوب.

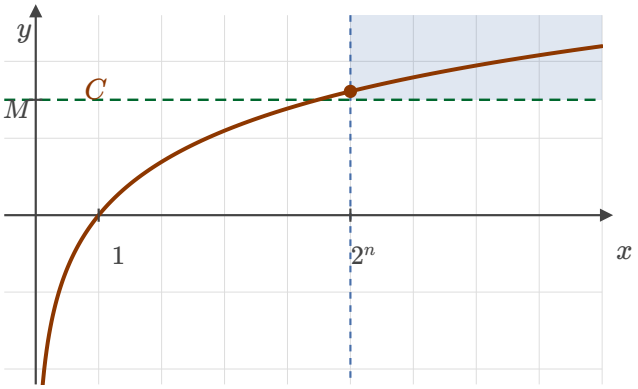
$$A = 2^n$$

4. الاستفادة من التزايد التامّ وهنا يعمل التزايد التامّ عمله: كلّ عددٍ أكبر من A لوغاريتمه أكبر من لوغاريتم A ، وهذا الأخير أكبر من M أصلاً. وهذا يبرهن النهاية الأولى استناداً إلى التعريف.

$$x > A \implies \ln x > \ln(2^n) > M$$

الفكرة القابلة للنقل: لإثبات أنّ تابعاً متزايداً يسعى إلى اللانهاية، يكفي أن تجد داخل مجاله متتالية قيمٍ تتجاوز أيّ حدٍّ مطلوب. هنا كانت القوى 2^n ، ويصلح المبدأ نفسه في مسائل أخرى.

$$\forall M > 0,\ \exists A,\ \forall x > A : \ln x > M$$



المنطقة المظلّلة هي ما يقوله البرهان: ابتداءً من الفاصلة $A = 2^n$ يبقى الخطّ البياني فوق الارتفاع M ، مهما اخترنا M كبيراً.

أمّا النهاية الثانية فيصل إليها الكتاب بفكرةٍ ذكيّة تنصّ على نقل النهاية عند الصفر إلى نهايةٍ عند اللانهاية، وذلك بإجراء تغييرٍ للمتحوّل. نضع $u = \dfrac{1}{x}$ ، فيكون $x = \dfrac{1}{u}$ ، ومن قاعدة لوغاريتم المقلوب $\ln x = -\ln u$.

$$\lim_{x \to 0,\ x>0} \ln x = -\lim_{u \to +\infty} \ln u = -(+\infty) = -\infty$$

تذكّر: تغيير المتحوّل هنا ليس حيلةً محلّيّة بل أداةٌ عامّة: كلّما ضاق عليك السلوك قرب الصفر، اقلب المتحوّل وانظر إلى السلوك عند اللانهاية، حيث أدواتك أكثر. وستعود هذه الأداة في دروس النهايات والتكامل.

ما قيمة $\lim\limits_{x\to 0,\ x>0} \ln x$ ؟

كيف أبدأ؟ ميّز أوّلاً بين طرفي مجموعة التعريف: السؤال عن الاقتراب من الصفر لا عن الذهاب إلى اللانهاية. والتابع متزايدٌ تماماً وينعدم عند 1 ، فاسأل هل ترتفع القيم أم تهبط وأنت نازلٌ من 1 نحو الصفر، ثمّ اسأل إن كان لهذا الهبوط قاعٌ يقف عنده.

أ) 0

ب) $-\infty$

ج) $+\infty$

ب. نعم. ومحور التراتيب هو المقارب الشاقولي للخطّ البياني، وهذا ما تراه في كلّ رسمٍ للتابع.

الجدول الكامل، والتقابل

بالنهايتين يكتمل جدول التغيّرات الذي رأيناه في الدرس الأوّل: كانت طرفاه فارغتين، والآن نعرف ما فيهما.

x	0		1		$+\infty$
$\ln' x$	‖	$+$	1	$+$	
$\ln x$	$-\infty$	↗ $-$ ↗	0	↗ $+$ ↗	$+\infty$

واستناداً إلى المبرهنتين 7 و 8 من الوحدة الثانية، وهما مبرهنة التقابل للتوابع المستمرّة المطّردة تماماً وجدول الصور، نستنتج أنّ صورة $\mathbb{R}_+^*$ وفق التابع $x \mapsto \ln x$ هي $\mathbb{R}$ كاملة.

التقابل

$\ln :]0,+\infty[\longrightarrow]-\infty,+\infty[$ تقابل، أي أنّه يأخذ كلّ قيمة حقيقيّة ولا يأخذ أيّاً منها مرّتين.

وهذه هي الصياغة التي سنستعملها: للمعادلة $\ln x = m$ حلٌّ، وهو وحيد، أيّاً كان m . $\forall m \in \mathbb{R},\ \exists! x \in]0,+\infty[$

الكتاب، الصفحة 144

انتبه: انتبه إلى أنّ m ليس مشروطاً بشيء. قد يكون موجباً أو سالباً أو معدوماً، وفي كلّ حالةٍ يوجد حلٌّ وحيد. ومن ظنّ أنّ m يجب أن يكون موجباً خلط بين مجموعة التعريف ومجموعة القيم: الأولى نصف مستقيم، والثانية المستقيم كلّه.

اصطلاح وترميز: من أين يأتي العدد النيبري

ما دام للمعادلة $\ln x = m$ حلٌّ وحيد، فمن حقّنا أن نعطي هذا الحلّ اسماً. والاسم المتّفق عليه هو e^m .

اصطلاح وترميز

$\ln(e^m) = m$ أيّاً كان العدد الحقيقيّ m . هذا هو معنى الرمز، لا نتيجةً تُبرهن.

$e^0 = 1$ لأنّ 1 هو الحلّ الوحيد للمعادلة $\ln x = 0$.

$e \approx 2.7182818284590$ الحالة الخاصّة $m = 1$ ، ويسمّى هذا العدد العدد النيبري ويُرمز إليه بـ e تبسيطاً.

الكتاب، الصفحة 144

انتبه: في هذه اللحظة من الكتاب، e^m ليس قوّةً بل اسماً. لم نعرّف بعدُ رفع عددٍ إلى أُسٍّ حقيقيّ، وهذا موضوع الوحدة القادمة. كلّ ما نملكه الآن هو أنّ e^m يرمز إلى الحلّ الوحيد للمعادلة $\ln x = m$ ، ولذلك لا يجوز أن تطبّق عليه قواعد القوى قبل أوانها.

تذكّر: ويسأل الكتاب في هذا الموضع سؤالاً ويتركه مفتوحاً: عندما يكون m عدداً طبيعيّاً، يشير الرمز e^m من جهةٍ إلى حلّ المعادلة، ومن جهةٍ ثانية إلى جداء m عاملاً كلّها تساوي e . فهل يقع التباس؟ الجواب لا، لأنّ العددين متساويان فعلاً. والسبب هو قاعدة لوغاريتم القوّة من الدرس السابق: لوغاريتم الجداء المكرّر هو $m \ln e = m$ ، وهو لوغاريتم حلّ المعادلة نفسه، والتقابل يمنع أن يكون لعددين مختلفين اللوغاريتم نفسه.

ما قيمة $\ln\left(e^5\right)$ ؟

> **كيف أبدأ؟** عُد في الدرس إلى «اصطلاح وترميز»: الرمز e^5 هناك ليس قوّةً بل اسمٌ لحلّ معادلةٍ بعينها. اكتب تلك المعادلة أوّلاً، ثمّ اقرأ السؤال عليها بدل أن تبحث عن قاعدةٍ تُنزل الأُسّ.

أ) 5
ب) $5 \ln e$
ج) e^5

أ. نعم، وهذا هو معنى الرمز نفسه: e^5 هو العدد الذي لوغاريتمه 5 .

كيف نستعمل هذا الاسم في حلّ المعادلات

فائدة الرمز عمليّة: كلّما عزلت اللوغاريتم في طرفٍ وبقي في الطرف الآخر عددٌ وحده، فالحلّ جاهز: ما داخل اللوغاريتم يساوي e مرفوعاً إلى ذلك العدد.

المثال الأوّل من الكتاب على الصفحة 145 . نبحث عن الأعداد الحقيقيّة x من المجال $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ التي تحقّق المعادلة.

$$\ln(1-2x) = -2$$

1. تغيير المتحوّل نضع $u = 1-2x$. أن يكون x حلاًّ للمعادلة المعطاة يُكافئ أن يكون u حلاًّ للمعادلة $\ln u = -2$. والشرط $x < \frac{1}{2}$ هو بالضبط الشرط $u > 0$.

$$u = 1-2x, \qquad \ln u = -2$$

2. الحلّ الوحيد ولهذه المعادلة الأخيرة حلٌّ وحيد، بحكم التقابل، وهو بالتعريف e مرفوعاً إلى -2 .

$$u = e^{-2}$$

3. العودة إلى المتحوّل الأصليّ نعوّض ونحلّ معادلةً من الدرجة الأولى. والقيمة الناتجة أصغر من $\frac{1}{2}$ فعلاً، لأنّ e^{-2} موجب.

$$1-2x = e^{-2} \iff x = \frac{1-e^{-2}}{2}$$

لا تحسب القيمة العشريّة إلّا إذا طُلبت. الشكل $\dfrac{1-e^{-2}}{2}$ هو الجواب الدقيق، والعشريّة تقريبٌ له.

$$\ln u = m \iff u = e^{m}$$

المثال الثاني على الصفحة نفسها. متراجحة من الدرجة الثانية، لكنّ متحوّلها ليس x بل $\ln x$ ، وهذه حيلةٌ متكرّرة في البكالوريا.

$$(\ln x + 2)\,(\ln x - 3) \leq 0$$

1. تغيير المتحوّل نضع $z = \ln x$ ، فتصير المتراجحة من الدرجة الثانية بالمتحوّل z . ومجموعة التعريف هي $]0, +\infty[$ لأنّ $\ln x$ يجب أن يوجد.

$$(z+2)(z-3) \leq 0$$

2. حلّ المتراجحة في z جداء عاملين من الدرجة الأولى سالبٌ أو معدوم بين الجذرين، كما تعلم من الوحدات السابقة.

$$-2 \leq z \leq 3$$

3. العودة إلى x نكتب الطرفين لوغاريتمين لنستفيد من التزايد التامّ: $-2 = \ln\left(e^{-2}\right)$ و $3 = \ln\left(e^{3}\right)$.

$$\ln\left(e^{-2}\right) \leq \ln x \leq \ln\left(e^{3}\right)$$

4. الجواب ولأنّ التابع متزايدٌ تماماً، فالمقارنة بين اللوغاريتمات هي المقارنة بين الأعداد نفسها. ولاحظ أنّ الطرفين داخلان لأنّ المتراجحة غير قطعيّة.

$$\mathcal{S} = \left[e^{-2},\, e^{3}\right]$$

كلّما رأيت $\ln x$ مكرّراً في تعبيرٍ من الدرجة الثانية، سمِّه z وحُلّ في z ، ثمّ عُد. ولا تنسَ العودة: z ليس الجواب.

$$z = \ln x \implies x = e^{z}$$

النقاط والمماسات الملفتة

على الخطّ البياني نقطتان يجب أن تعرفهما عن ظهر قلب. فاصلتاهما 1 و e ، ولأنّ $\ln(1) = 0$ و $\ln(e) = 1$ فإنّ النقطتين هما $A(1,0)$ و $B(e,1)$. ومحور التراتيب مقاربٌ للخطّ، وهو ما تقوله النهاية عند الصفر.

معادلة المماس عند فاصلةٍ

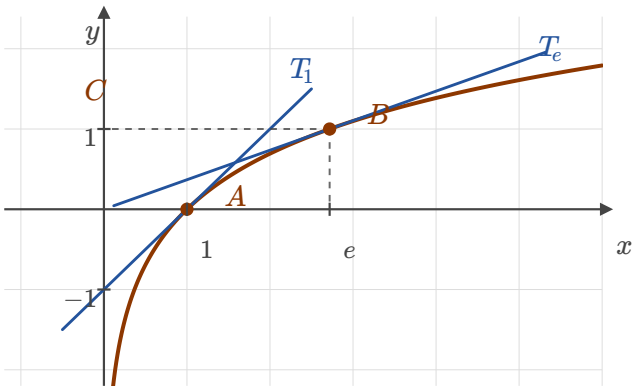
$\ln'(x_0) = \frac{1}{x_0}$ الميل عند النقطة التي فاصلتها x_0 .

$y = \ln(x_0) + \frac{1}{x_0}(x - x_0)$ الصيغة المعتادة: ارتفاعٌ عند الفاصلة، ثمّ تحرّكٌ بالميل.

$y = \frac{x}{x_0} + \ln(x_0) - 1$ الصيغة نفسها بعد النشر، وهي أسرع عند التعويض بقيمةٍ عدديّة.

الكتاب، الصفحة 145

وبالتعويض تخرج حالتان لافتتان. عند $x_0 = 1$ يكون الميل 1 و $\ln 1 = 0$ ، فالمماس هو $y = x - 1$. وعند $x_0 = e$ يكون الميل $\frac{1}{e}$ و $\ln e = 1$ ، فيصير الحدّان الأخيران $1 - 1 = 0$ والمماس هو $y = \frac{x}{e}$ ، وهذا يمرّ بمبدأ الإحداثيّات.



المماس في $A(1,0)$ هو $y=x-1$ ويقطع محور التراتيب عند -1 ، والمماس في $B(e,1)$ هو $y=\dfrac{x}{e}$ ويمرّ بالمبدأ.

انتبه: ميل المماس عند الفاصلة x_0 هو $\dfrac{1}{x_0}$ لا $\ln(x_0)$. الخلط بينهما من أكثر ما يتكرّر، ونتيجته مستقيمٌ يقطع الخطّ البياني بدل أن يمسّه. وتذكّر أنّ الميل يصغر كلّما ابتعدنا يميناً، وهذا هو سبب تسطّح الخطّ البياني كلّما اتّجهنا يميناً.

ما ميل المماس للخطّ البياني للتابع $\ln$ عند النقطة التي فاصلتها 4 ؟

كيف أبدأ؟ الميل والارتفاع مقداران مختلفان: الارتفاع يُقرأ من التابع نفسه، والميل من مشتقّه. حدّد أيّهما يطلبه السؤال، ثمّ استحضر صيغة $\ln'(x_0)$ من «معادلة المماس عند فاصلةٍ» وعوّض فيها 4 .

أ) $\ln 4$

ب) 4

ج) $\dfrac{1}{4}$

ج. نعم، لأنّ $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$. ولاحظ أنّ الميل موجبٌ دائماً وصغير، فالخطّ البياني صاعدٌ وبطيء.

مثال محلول: دراسة تابع لإثبات متراجحة

وهذا نمطٌ ثابت في البكالوريا: يُطلب إثبات متراجحة، والطريق ليس الحساب المباشر بل دراسة اطّراد تابعٍ مساعد. نبني الفرق بين الطرفين ونُثبت أنّه لا ينزل تحت قيمةٍ موجبة.

مثال الكتاب على الصفحة 146 . المطلوب إثبات أنّ $\ln x < 2\sqrt{x}$ أيّاً يكن $x>0$.

$$f(x)=2\sqrt{x}-\ln x$$

1. التابع المساعد نعرّف f على المجال $I=]0,+\infty[$ بالفرق بين الطرفين. إن أثبتنا أنّه موجبٌ تماماً على I فقد أثبتنا المتراجحة.

$$f(x)=2\sqrt{x}-\ln x$$

2. المشتق بثلاث صيغ التابع اشتقاقيٌّ على I . والصيغة الأخيرة هي الأنفع، لأنّ مقامها موجبٌ تماماً فتصير إشارة المشتق إشارة $x-1$ وحدها.

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-1}{x}=\frac{x-1}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

3. جدول الاطّراد ينعدم المشتق عند $x = 1$ ويغيّر إشارته هناك، فالتابع متناقصٌ قبله ومتزايدٌ بعده. إذن عند $x = 1$ أصغريّةٌ مطلقة، وقيمتها $f(1) = 2 - 0 = 2$.

$$f(1) = 2\sqrt{1} - \ln 1 = 2$$

4. الخلاصة أصغر قيمةٍ يأخذها التابع هي 2 ، وهي موجبة. إذن $f(x) \geq 2 > 0$ عند كلّ x من I ، وهذا هو المطلوب بعد نقل $\ln x$ إلى الطرف الآخر.

$$f(x) \geq 2 > 0 \implies \ln x < 2\sqrt{x}$$

لإثبات متراجحةٍ بين تابعين: ادرس اطّراد الفرق، وابحث عن أصغريّته. إشارة الأصغريّة تحسم المتراجحة على المجال كلّه، ولا حاجة إلى فحص أيّ قيمةٍ أخرى.

$$\min_{I}(g - h) > 0 \implies \forall x \in I : g(x) > h(x)$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$\searrow$	2	$\nearrow$	

تذكّر: لاحظ أنّ هذا الجدول لا يحمل شرطةً مزدوجة عند الصفر ولا قيماً في الطرفين، بخلاف جدول $\ln$ في أوّل الدرس. الكتاب يكتفي بما يحتاجه البرهان، وهذه عادةٌ حسنة: الجدول أداة، لا زينة.

تذكّر: وهذه المتراجحة نفسها تعود في الدرس الأخير من الوحدة، حيث تُستعمل لإثبات أنّ $\ln x$ يصغر أمام x عند اللانهاية. فلا تعاملها كتمرينٍ عابر: هي حجرٌ في بناءٍ لاحق.

المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 143 إلى 146 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.