الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

التّعامد في الفراغ

من عددٍ يساوي صفراً إلى مستوٍ كامل

الجداء السّلّمي في الفراغ . الوحدة 2 . الدرس 3

بسيطة

في درسنا السابق خرج الصفر مرّتين، في رباعي الوجوه وفي المكعّب، وتركه الكتاب بلا تعليق في الحالتين. هنا يُنطق أخيراً بالكلمة: ذلك الصفر يعني التعامد. ثمّ يحدث الشيء الأكبر في صفحةٍ واحدة: من شرطٍ صغير $\overrightarrow{AM}\cdot n=0$ يُبنى مستوٍ كامل. هذه الجملة وحدها هي ما يجعل الدرس التالي ممكناً، لأنّ معادلة المستوي الديكارتيّة ليست إلّا كتابةَ هذا الشرط بالإحداثيّات.

التعامد تعريفاً، لا نتيجةً

لا برهان في المستهلّ ولا اشتقاق. الكتاب يضع التعريف وضعاً: في الفراغ، يتعامد شعاعان إذا وفقط إذا كان جداؤهما السّلّمي صفراً. ثمّ يترجم هذا الشرط الواحد إلى لغتين أخريين، لغة المستقيمات ولغة الإحداثيّات، وبهذا تكتمل أداة العمل قبل أن يُذكر أيّ مجسّم.

تعريف 3

في الفراغ، يتعامد الشعاعان u و v إذا وفقط إذا تحقّق هذا. لاحظ أنّ الكتاب لا يشترط هنا أن يكون أيّ منهما غير معدوم. $u\cdot v=0$

وإذا كان $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ ، كان تعامد الشعاعين مكافئاً لتعامد المستقيمين (AB) و (CD). الشرطان على الطرف غير المعدوم مكتوبان في الكتاب صراحةً. $u=\overrightarrow{AB}\neq 0$ و $v=\overrightarrow{CD}\neq 0$

وإذا كان $u\,(x,y,z)$ و $v\,(x',y',z')$ في معلمٍ متجانس، كان التعامد مكافئاً لهذا. عبارة «معلم متجانس» ملوّنة في الكتاب كلّها، وهي شرطٌ لا زينة. $xx'+yy'+zz'=0$

الكتاب، الصفحة 45

تذكّر: السطران الأوّل والثاني ليسا الشيء نفسه. الأوّل يقبل الشعاع المعدوم، والثاني يمنعه. والسبب بسيط: الشعاع المعدوم جداؤه مع كلّ شعاعٍ صفر، لكنّه لا يعيّن مستقيماً.

انتبه: صيغة الإحداثيّات $xx'+yy'+zz'=0$ لا تعمل إلّا في معلمٍ متجانس. في معلمٍ كيفيّ تعطي عدداً ليس الجداء السّلّمي أصلاً. إن لم تقل المسألة «معلم متجانس»، فلا تستعمل الصيغة، وإن قالتها فاستعملها بلا تردّد.

عُلم أنّ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ وأنّ $C=D$. ماذا تستنتج عن المستقيمين؟

> **كيف أبدأ؟** اقرأ السطر الثاني من تعريف 3 مرّةً أخرى، وانظر ما الذي يشترطه على $\overrightarrow{CD}$ قبل أن يسمح بالترجمة إلى مستقيمات.

أ) المستقيمان متعامدان

ب) لا يوجد مستقيم (CD) أصلاً

ج) المستقيمان متوازيان

ب. نعم. نقطتان منطبقتان لا تعيّنان مستقيماً، فالسؤال عن تعامد (AB) و (CD) بلا معنى. ولهذا كتب الكتاب الشرطين $0\neq$ في السطر الثاني وحده.

الشعاع الناظم، وكيف يُمسَك مستوٍ بشعاعٍ واحد

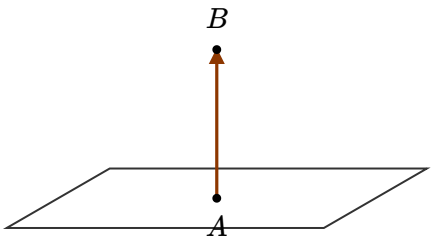
الآن ينتقل الكتاب من شعاعين إلى شعاعٍ ومستوٍ، ويفعل ذلك بالمرور على مستقيم: الشعاع $\overrightarrow{AB}$ غير المعدوم يُسمّى ناظماً على المستوي $\mathcal{P}$ إذا كان المستقيم (AB) عموديّاً على $\mathcal{P}$. ثمّ يعمّم على أيّ شعاعٍ n بالكلام عن منحاه، أي عن المستقيم الحامل لاتّجاهه، لا عن موضع طرفيه.

تعريف 4

$n\neq 0$ شرطٌ لازمٌ في التعريف نفسه: الكتاب يقول «الشّعاع غير الصّفريّ»، ثمّ يعيدها في الصيغة العامّة.

$n=\overrightarrow{AB}$ يكون n ناظماً على $\mathcal{P}$ إذا وفقط إذا كان منحاه عموديّاً على $\mathcal{P}$ ، أي إذا كان المستقيم (AB) عموديّاً على المستوي.

الكتاب، الصفحة 45



الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ناظمٌ على $\mathcal{P}$: المستقيم (AB) عموديٌّ على المستوي، والنقطة A عليه.

انتبه: لا تقبل $n=0$ شعاعاً ناظماً أبداً. لو قبلته لكان $\overrightarrow{AM}\cdot 0=0$ محقّقاً عند كلّ نقطةٍ M في الفراغ، فيصير «المستوي» هو الفراغ كلّه. الكتاب يعيد هذا الشرط في صفحة 51 أيضاً: «وهو لا يكون معدوماً أبداً».

الشعاع n ناظمٌ على $\mathcal{P}$. هل $-3n$ ناظمٌ عليه أيضاً؟

> **كيف أبدأ؟** التعريف يتكلّم عن منحى الشعاع، أي عن المستقيم الحامل لاتّجاهه. اسأل: هل لـ $-3n$ المنحى نفسه؟ وهل هو غير معدوم؟

أ) نعم، لأنّ منحاه هو منحى n نفسه وهو غير معدوم

ب) لا، لأنّ جهته معاكسة

ج) لا، لأنّ طوله تغيّر

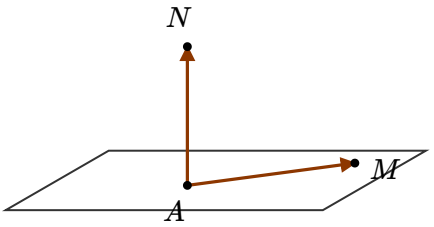
أ. نعم. كلّ مضاعفٍ غير معدوم لشعاعٍ ناظم هو شعاع ناظم، لأنّ التعريف يشترط المنحى وحده، لا الطول ولا الجهة. فلمستوٍ واحدٍ عددٌ لا نهائي من الأشعّة الناظمة.

عقدة الدرس: مستوٍ يُبنى من شرط

إلى هنا كان كلّ شيء جبراً: عددٌ يساوي صفراً. في الفقرة 3.3 يبدّل الكتاب طريقة التفكير بلا إنذار. المستوي لم يعد شيئاً معطى نتكلّم عنه، بل صار شيئاً نصنعه: نأخذ مستقيماً d شعاع توجيهه n ، ونقطةً A عليه، ثمّ نجمع كلّ النقاط M التي يكون (AM) فيها عموديّاً على d . هذه المجموعة هي المستوي العمودي على d في A .

والخطوة الأخيرة هي التي تُقرأ بسرعةٍ ولا تُفهم: « (AM) عمودي على d » تُستبدل بـ« $\overrightarrow{AM}$ عمودي على n »، أي بجداءٍ سلّميٍّ معدوم. الاستبدال مشروع لأنّ n شعاع توجيهٍ لـ d ، فالعمود على المستقيم هو العمود على شعاع توجيهه. وبهذا يصير شرطُ الانتماء حساباً.

> **الجملة الحمراء في آخر الصفحة 45**
>
> $\overrightarrow{AM}\cdot n=0$ المستوي المارّ بالنقطة A والذي يقبل n شعاعاً ناظماً هو مجموعة النقاط M التي تحقّق هذا الشرط. هذه هي الجملة التي يُبنى عليها الدرس الرابع كلّه.
>
> الكتاب، الصفحة 45



الشعاع $\overrightarrow{AN}$ هو n . كلّ نقطةٍ M يكون فيها $\overrightarrow{AM}\cdot n=0$ تقع على $\mathcal{P}$ ، والعكس بالعكس.

تذكّر: النقطة A نفسها داخلةٌ في المستوي، والكتاب يضعها في قوسٍ صغير: «بالإضافة إلى النّقطة A ذاتها». والسبب لا يقوله: عند $M = A$ لا يوجد مستقيم (AM) لأنّ $\overrightarrow{AA} = 0$. الصياغة بالمستقيمات تحتاج هذا الاستدراك، والصياغة الشعاعيّة لا تحتاجه، لأنّ $0 \cdot n = 0$ صحيحٌ من نفسه. وهذا بالضبط سبب اختيار الكتاب للصياغة الشعاعيّة في السطر الأخير.

لماذا تكفي هذه الجملة لكتابة معادلة مستوٍ في الدرس التالي؟

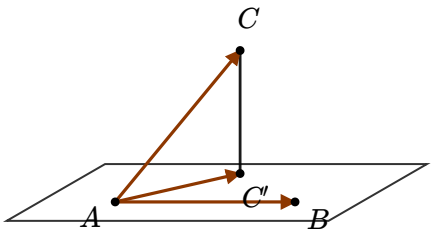
كيف أبدأ؟ اكتب $\overrightarrow{AM}$ بمركّباته في معلمٍ متجانس، وتذكّر السطر الثالث من تعريف 3.

أ) لأنّها تعطي طول الشعاع الناظم
ب) لأنّها تعيّن نقطةً واحدة على المستوي
ج) لأنّها تحوّل الانتماء إلى المستوي إلى معادلةٍ بالإحداثيّات

ج. نعم. « M على المستوي» صار شرطاً حسابيّاً، وبمركّبات $\overrightarrow{AM}$ و n في معلمٍ متجانس يصير الشرط $ax + by + cz + d = 0$. الكتاب يقولها في صفحة 51: هذه الخاصّة المميّزة هي التي تفيد في كتابة المعادلة الديكارتيّة.

المسقط القائم لا يغيّر الجداء

الصفحة 46 تبدأ بنقصٍ يُسدّ. في الدرس السابق، عند حساب $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG}$ في المكعّب، أسقط الكتاب النقطة G على مستوٍ ثمّ على مستقيم، مع أنّه لم يكن قد عرّف إلّا الإسقاط على مستقيم. هنا يُثبت الحالة الأعمّ، وبرهانها قصير.



النقطتان A و B في المستوي $\mathcal{P}$ ، والنقطة C خارجه، و C' مسقطها القائم عليه. الشعاع $\overrightarrow{C'C}$ عموديٌّ على المستوي كلّه.

لتكن A و B نقطتين من مستوٍ $\mathcal{P}$ والنقطة C خارجه، ولتكن C' مسقطها القائم على $\mathcal{P}$. أثبت أنّ الجداء السّلّمي لا يتغيّر إذا استُبدل $\overrightarrow{AC}$ بمسقطه. كما في الكتاب صفحة 46.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

1. ① المسقط موجودٌ ووحيد يوجد مستقيمٌ وحيد عمودي على $\mathcal{P}$ ويمرّ بـ C ، ويقطع المستوي في نقطةٍ واحدة نسمّيها C' . هذا ما يعطي للكلمة «المسقط القائم» معنىً محدّداً.

$$C' \in \mathcal{P}$$

2. ② فكّك بعلاقة شال اكتب $\overrightarrow{AC}$ بالمرور على C' ، ثمّ وزّع الجداء على المجموع بالقاعدة المعروفة من الدرس السابق.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'C}$$

3. ③ احذف الحدّ الثاني المستقيم (CC') عموديٌّ على $\mathcal{P}$ إنشاءً، والمستقيم (AB) محتوى في $\mathcal{P}$. فهما متعامدان، وجداؤهما السّلّمي صفر.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'C}=0$$

اقرأ جيّداً أيّ الشعاعين يُستبدَل: الذي يخرج من المستوي، أي $\overrightarrow{AC}$. أمّا $\overrightarrow{AB}$ فهو الذي يعطي المنحى ولا يُمسّ. والكتاب يجيز الإسقاط على المستقيم (AB) وعلى كلّ مستوٍ يحوي (AB) ، وهذه هي القاعدة التي استُعملت في مكعّب الصفحة 44 قبل أن تُعلَن.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}$$

انتبه: لا تبحث عن الزاوية القائمة في الرسم لتبرّر $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'C}=0$. السبب ليس ما تراه، بل الوضع: (CC') عمودٌ على المستوي، وكلّ مستقيمٍ في ذلك المستوي عموديٌّ عليه، ومنها (AB) . الرسم في الفراغ يكذب على العين كثيراً.

في الشكل أعلاه، ما قيمة $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'C}$ ؟

كيف أبدأ؟ اسأل أين يقع كلٌّ من الشعاعين: أيّهما في المستوي وأيّهما عمودٌ عليه.

أ) صفر، لأنّ (AB) في المستوي و (CC') عمودٌ عليه

ب) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

ج) لا يمكن تعيينها بلا أطوال

أ. نعم، وهذا هو الحدّ الذي يسقط في الخطوة ③. عمودٌ على مستوٍ يعني عموداً على كلّ مستقيمٍ فيه، لا على مستقيمٍ واحدٍ مختار.

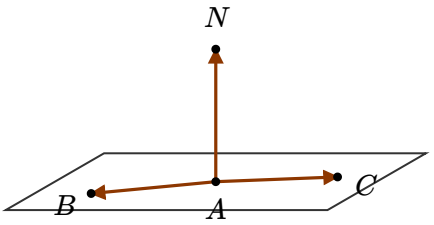
أداتان للعمل: مستقيم مع مستوٍ، ومستويان معاً

الفقرتان الباقيتان من الصفحة 46 لا تحملان برهاناً، بل أداتين تُستعملان في كلّ تمرينٍ تقريباً. الأولى تجيب: كيف نُثبت أنّ مستقيماً عموديٌّ على مستوٍ من دون أن نتكلّم عن كلّ مستقيمات ذلك المستوي؟

تعامد مستقيمٍ مع مستوٍ

إذا كان $u \cdot v = 0$, $u \cdot w = 0$ شعاعاً موجّهاً للمستقيم d ، وكان v و w شعاعين مستقلّين خطّيّاً في المستوي $\mathcal{P}$ ، وتحقّق هذان الشرطان، كان d عموديّاً على $\mathcal{P}$.

الكتاب، الصفحة 46



$\overrightarrow{AN}$ هو u ، و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ هما v و w في المستوي. الشعاعان في المستوي غير متوازيين، وهذا هو الشرط الذي يُنسى.

انتبه: شعاعٌ واحد لا يكفي. إن أثبتّ $u \cdot v = 0$ وحدها، فقد أثبتّ أنّ d عموديٌّ على مستقيمٍ واحد من المستوي، لا على المستوي. وشعاعان متوازيان لا يكفيان أيضاً، لأنّهما لا يفرشان مستوياً. تحقّق أوّلاً أنّ v و w ليسا مضاعفين لبعضهما.

والأداة الثانية تقرأ وضع مستويين من ناظِمَيهما وحدهما، بلا رسمٍ وبلا تقاطع.

الأوضاع النسبيّة لمستويين

إذا كان $n_1 = k\,n_2$ n_1 و n_2 مرتبطين خطّيّاً، كان المستويان متوازيين أو منطبقين. وإذا لم يكونا مرتبطين، كان المستويان متقاطعين.

وإذا كان الناظمان متعامدين كان المستويان متعامدين، والعكس صحيحٌ أيضاً. الكتاب يقولها صراحةً، فهذا تكافؤٌ لا اتّجاهٌ واحد. $n_1 \cdot n_2 = 0$

الكتاب، الصفحة 46

انتبه: الارتباط الخطّي للناظمين لا يفرّق بين التوازي والانطباق، والكتاب يضع «أو منطبقين» في قوس. للتفريق بينهما تحتاج نقطةً: خذ نقطةً من أحد المستويين وانظر هل تحقّق شرط الآخر.

مستويان لهما ناظمان $n_1\,(1,2,-1)$ و $n_2\,(-2,-4,2)$. ما وضعهما؟

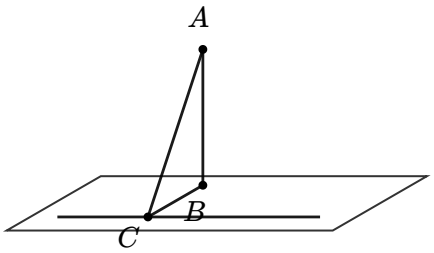
كيف أبدأ؟ اسأل أوّلاً: هل n_2 مضاعفٌ لـ n_1 ؟ ثمّ اقرأ السطر الأوّل من الإطار بحرفه، بما في ذلك ما بين القوسين.

أ) متقاطعان
ب) متعامدان
ج) متوازيان أو منطبقان، ولا يمكن الفصل بينهما هنا

ج. نعم. $n_2 = -2\,n_1$ ، والناظمان مرتبطان خطّيّاً. والفصل بين التوازي والانطباق يحتاج نقطةً من أحد المستويين، والمعطيات هنا لا تعطيها.

مثال الكتاب: خاصّة الأعمدة الثلاثة

المثال الوحيد في هذا الدرس هو ما يسمّيه الكتاب «خاصّة الأعمدة الثلاثة»، وهي نتيجةٌ كلاسيكيّة تُحلّ هنا بثلاثة أسطر بفضل الفقرة السابقة. وبجانب الحلّ مصباحٌ يحمل الفكرة كلّها: لإثبات تعامد مستقيمين، يكفي إثبات تعامد شعاعٍ موجّهٍ لأحدهما مع شعاعٍ موجّهٍ للآخر.



المستقيم d هو (CD) في المستوي $\mathcal{P}$. والنقطة B مسقط A على $\mathcal{P}$ ، والنقطة C مسقط B على d . المطلوب: (AC) و d متعامدان.

المستقيم d محتوى في المستوي $\mathcal{P}$ ، والنقطة B هي المسقط القائم لنقطةٍ A خارج $\mathcal{P}$ على $\mathcal{P}$ ، والنقطة C هي المسقط القائم لـ B على d . أثبت أنّ (AC) و d متعامدان. كما في الكتاب صفحة 46.

$$\overrightarrow{AC}\cdot u$$

1. ① سمِّ شعاع التوجيه ليكن u شعاعاً موجّهاً للمستقيم d . لاحظ جيّداً أنّ u شعاعٌ في المستوي، لا شعاعٌ ناظم عليه.

$$u \neq 0$$

2. ② استبدل بالمسقط الشعاع $\overrightarrow{BC}$ هو المسقط القائم للشعاع $\overrightarrow{AC}$ على المستوي $\mathcal{P}$ ، لأنّ B مسقط A . وبالخلاصة السابقة لا يتغيّر الجداء بهذا الاستبدال.

$$\overrightarrow{AC}\cdot u = \overrightarrow{BC}\cdot u$$

3. ③ استعمل العمود الجاهز المستقيم (BC) عموديٌّ على d إنشاءً، لأنّ C هي مسقط B على d . فالجداء صفر، وهي النتيجة المرجوّة.

$$\overrightarrow{BC} \cdot u = 0$$

الاسم «الأعمدة الثلاثة» يعدّها: (AB) عمودٌ على المستوي، و (BC) عمودٌ على d ، فينتج أنّ (AC) عمودٌ على d أيضاً. والعمود الثالث لم يُرسم، بل حُسب.

$$\overrightarrow{AC} \cdot u = 0$$

انتبه: لا تخلط بين u والشعاع الناظم. هنا u يقع في المستوي $\mathcal{P}$ ويوجّه مستقيماً داخله، والشعاع الناظم يخرج من المستوي عموديّاً. اكتب بجانب كلّ شعاعٍ في مسوّدتك أين يقع، فالخلط بين الاثنين هو أكثر ما يُفسد حلول هذه الفقرة.

أطوال u و v و $u+v$ هي بالترتيب 6 و 8 و 10 . أيكون الشعاعان متعامدين؟

> **كيف أبدأ؟** لا تجمع الأطوال. ربّع نظيم المجموع بالصيغة $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\,u\cdot v + \|v\|^2$ وحلّ المعادلة بالنسبة إلى الجداء.

أ) لا، لأنّ $6+8 \neq 10$

ب) نعم، لأنّ $100 = 36 + 64$

ج) لا يمكن الحكم بلا معلمٍ متجانس

ب. نعم. من $100 = 36 + 2\,u\cdot v + 64$ يخرج $u\cdot v = 0$ ، فالشعاعان متعامدان بالسطر الأوّل من تعريف 3. وهذه هي مبرهنة فيثاغورس مكتوبةً بالأشعّة. هذا هو السؤال ③ من تَدَرَّبْ صفحة 47.

المصدر: الرياضيات، الجزء الثاني، الصفحات 45 إلى 47 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.