الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

المعادلة الدّيكارتيّة لمستوٍ

أربعة أعداد تكفي لتصف مستوياً كاملاً

الجداء السّلّمي في الفراغ . الوحدة 2 . الدرس 4

بسيطة

في الدرس السابق انتهينا إلى جملةٍ واحدة: المستوي هو مجموعة النقاط M التي تحقّق $\overrightarrow{AM}\cdot n=0$. هذا الدرس لا يفعل سوى شيءٍ واحد: يكتب تلك الجملة بالإحداثيّات. والنتيجة أنّ مستوياً في الفراغ، وهو شيءٌ لا نهائيّ الاتّساع، يُمسَك بأربعة أعداد a و b و c و d . ثلاثةٌ منها هي الشعاع الناظم، والرابع يقول أين يقع المستوي.

الجسر: من مستوٍ إلى معادلة، ومن معادلة إلى مستوٍ

المبرهنة تسير في الاتّجاهين، ولذلك هي جسرٌ لا قاعدة. الاتّجاه الأوّل يقول إنّ لكلّ مستوٍ معادلةً من هذا الشكل. والاتّجاه الثاني يقول إنّ كلّ معادلةٍ من هذا الشكل تصف مستوياً. من دون الاتّجاه الثاني لا يجوز لك أن تنظر إلى $2x-y+3z-5=0$ وتقول «هذا مستوٍ».

مبرهنة 5

$ax+by+cz+d=0$ في معلمٍ متجانس: لكلّ مستوٍ $\mathcal{P}$ معادلةٌ ديكارتيّة من هذا الشكل، حيث الأعداد a و b و c ليست جميعها معدومة.

$n\,(a,b,c)$ ومعاملات x و y و z هي بعينها مركّبات شعاعٍ ناظم على $\mathcal{P}$. تقرأ الناظم من المعادلة مباشرةً بلا حساب.

$ax+by+cz+d=0$ وبالعكس: إذا أُعطيت أربعة أعداد a و b و c ليست جميعها معدومة، فمجموعة النقاط $M\,(x,y,z)$ التي تحقّق المعادلة هي مستوٍ يقبل $n\,(a,b,c)$ شعاعاً ناظماً.

الكتاب، الصفحة 48

تذكّر: «ليست جميعها معدومة» لا تعني «كلٌّ منها غير معدوم». صفرٌ واحد أو صفران مسموحان تماماً: $n\,(1,-1,0)$ و $n\,(0,0,1)$ شعاعان ناظمان صحيحان، والمعادلتان $x-y-1=0$ و $z=2$ مستويان صحيحان. الممنوع هو الثلاثة معاً.

برهان الاتّجاه الأوّل كما في الكتاب صفحة 48. الأداة الوحيدة هي جملة الدرس السابق، ولا شيء غيرها.

$$\overrightarrow{AM}\cdot n=0$$

1. ① خذ نقطةً من المستوي ليكن $n\,(a,b,c)$ شعاعاً ناظماً على $\mathcal{P}$ ، ولتكن $A\,(x_0,y_0,z_0)$ نقطةً منه. الخاصّة المميّزة تقول إنّ M في $\mathcal{P}$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AM}$ عموديّاً على n .

$$\overrightarrow{AM}\,(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$$

2. ② اكتب الجداء بالمركّبات هنا وهنا فقط يدخل المعلم المتجانس: من دونه لا يساوي الجداء السّلّمي مجموع جداءات المركّبات.

$$a\,(x-x_0)+b\,(y-y_0)+c\,(z-z_0)=0$$

3. ③ سمِّ الثابت افتح الأقواس واجمع الأعداد الثابتة في حرفٍ واحد. الكتاب يعرّف $d=-ax_0-by_0-cz_0$ ، وبذلك ينتهي البرهان.

$$ax+by+cz+d=0$$

انظر ماذا يحمل كلّ حرف: a و b و c تحمل الاتّجاه وحده، و d وحده يحمل الموضع. ولذلك تغييرُ d وحده يزيح المستوي موازياً لنفسه. أمّا الثلاثة فتُميله إن تغيّرت باتّجاهٍ جديد، ولا تغيّر شيئاً إن ضُربت كلّها مع d في العدد نفسه.

$$d=-ax_0-by_0-cz_0$$

والاتّجاه الثاني يسير بالعكس، وفيه خطوةٌ لطيفة: النقطة A ليست معطاةً، بل تُصنع. يكفي أن نجد عدداً واحداً من بين a و b و c غير معدوم، وهو موجودٌ بالفرض. الكتاب يأخذ حالة $a\neq 0$ ويختار $x_0=-\frac{d}{a}$ و $y_0=z_0=0$ ، فتقع A على المجموعة، ويسير البرهان الأوّل مقلوباً.

هل تصف المعادلة $0x+0y+0z+5=0$ مستوياً؟

كيف أبدأ؟ اسأل أوّلاً: هل تحقّق شرط المبرهنة؟ ثمّ اسأل: أيّ نقطةٍ M تحقّق هذه المعادلة فعلاً؟

أ) نعم، وشعاعها الناظم $n\,(0,0,0)$

ب) لا، والمجموعة خالية

ج) لا، لأنّ المعادلة تنقصها المتحوّلات

ب. نعم. المعادلة تصير $0=5$ ، وهي كاذبةٌ عند كلّ نقطة، فالمجموعة خالية ولا مستوي. ولو كان الثابت صفراً لصارت المجموعة الفراغَ كلّه. في الحالتين ليست مستوياً، ولهذا يشترط الكتاب أن تكون a أو b أو c غير معدومة.

مثال الكتاب: من نقطةٍ وناظمٍ إلى معادلة

هذا أصغر تطبيقٍ ممكن للمبرهنة، وهو النمط الذي يتكرّر في السؤال الأوّل من كلّ تمرينٍ تقريباً: تُعطى نقطةٌ وشعاعٌ ناظم، وتُطلب المعادلة.

في معلمٍ متجانس، أعطِ معادلةً للمستوي $\mathcal{P}$ المارّ بالنقطة $A\,(2,1,-3)$ ويقبل $n\,(1,1,2)$ شعاعاً ناظماً. كما في الكتاب صفحة 49.

$$A\,(2,1,-3) \quad , \quad n\,(1,1,2)$$

1. ① اكتب الخاصّة المميّزة النقطة $M\,(x,y,z)$ على $\mathcal{P}$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AM}$ عمودياً على n . ومركّبات $\overrightarrow{AM}$ هي إحداثيّات M ناقص إحداثيّات A .

$$\overrightarrow{AM}\,(x-2,y-1,z+3)$$

2. ② عوّض في الجداء اضرب مركّبةً بمركّبة واجمع. الإشارة في $z+3$ تأتي من $z-(-3)$ ، وهي أكثر موضعٍ يُخطأ فيه.

$$1\,(x-2)+1\,(y-1)+2\,(z+3)=0$$

3. ③ رتّب افتح الأقواس: $-2-1+6=3$. والمعاملات لم تتغيّر، فهي الناظم نفسه.

$$x+y+2z+3=0$$

اختبارٌ يستغرق ثانية: ضع إحداثيّات A في المعادلة التي كتبتها. $2+1-6+3=0$ ، فالنقطة على المستوي وقد وقعت المعادلة صحيحة. أيّ خطأ في إشارةٍ يظهر هنا فوراً.

$$2+1+2\,(-3)+3=0$$

انتبه: الكتاب نفسه يكتب في هذا الحلّ $\overrightarrow{MA}\cdot n=0$ ، ثمّ يحسب بمركّبات $\overrightarrow{AM}$. لا فرق في النتيجة هنا لأنّ الطرف الأيمن صفر، و $\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{AM}$. لكنّ برهان المبرهنة 5 وخلاصة الوحدة في صفحة 51 يكتبان $\overrightarrow{AM}$ كلتاهما، وفي حساب البُعد تقلب هذه المبادلة الإشارة. اكتب $\overrightarrow{AM}$ دائماً.

اكتب معادلة المستوي المارّ بـ $A\,(1,0,5)$ وناظمه $n\,(1,-1,0)$.

> **كيف أبدأ؟** المركّبة الثالثة للناظم صفر، فالحدّ الذي يحمل z يختفي. لا يعني ذلك أنّ z حرّةٌ في الحساب، بل أنّ معاملها صفر.

أ) $x-y+5=0$
ب) $x-y-1+z=0$
ج) $x-y-1=0$

ج. نعم: $(x-1)-y=0$. اختبرها بـ A : $1-0-1=0$. والمستوي هذا يوازي محور z لأنّ ناظمه لا يحمل مركّبةً ثالثة.

مستوٍ يوازي مستوياً: ما يبقى وما يتغيّر

المسألة النمطيّة الثانية: يُعطى مستوٍ $\mathcal{P}$ ونقطةٌ A ، ويُطلب المستوي $\mathcal{Q}$ المارّ بـ A والموازي لـ $\mathcal{P}$. لا تبحث عن شعاعٍ ناظمٍ جديد: المستويان المتوازيان يتشاركان ناظمهما. الثلاثة الأولى تُنقل كما هي، ويُحسَب d وحده من شرط مرور $\mathcal{Q}$ بالنقطة.

$$ax + by + cz + d' = 0$$

تذكّر: هذه ليست قاعدةً مطبوعةً في الكتاب، بل ما تفعله تمارين الصفحة 50 عملياً: معادلة كلّ مستوٍ يوازي $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$ تحمل المعاملات الثلاثة نفسها، ويتغيّر الثابت وحده. و d' يُعيَّن بتعويض إحداثيّات النقطة التي يجب أن يمرّ بها المستوي الجديد.

انتبه: 🚨 قبل أيّ حساب، انقل الطرف الأيمن إلى اليسار حتّى يصير صفراً. تمارين الصفحة 50 تعطي مستوياتها هكذا: $2x - y + 3z = 4$ و $z = 2$ و $x + y = 5$ و $5x - 3y + 4z = 8$ ، أي ليست في الصيغة النظاميّة. من يقرأ $d = 4$ بدل $d = -4$ يحصل على إشارةٍ مقلوبة في حساب البُعد ولا يلاحظ شيئاً، لأنّ الناتج يبقى عدداً معقولاً.

تذكّر: المعادلة ليست وحيدة. نصّ المبرهنة 5 يقول «معادلة ديكارتيّة» بالتنكير، وإن كان عنوان الدرس نفسه يحمل الأداة: كلّ مضاعفٍ غير معدوم يصف المستوي نفسه، فـ $x + y + 2z + 3 = 0$ و $2x + 2y + 4z + 6 = 0$ مستوٍ واحد. لكن انتبه للعكس: تناسب المعاملات الثلاثة وحدها لا يكفي، يجب أن يتناسب الثابت معها بالنسبة نفسها.

$\mathcal{P} : 2x - y + 3z = 4$ ، والنقطة $A\,(1, 0, 1)$. ما معادلة المستوي الموازي المارّ بـ A ؟

كيف أبدأ؟ الناظم هو $n\,(2, -1, 3)$ ولا يتغيّر. احسب $2 \times 1 - 0 + 3 \times 1$ واجعل المعادلة تعطي هذه القيمة عند A .

أ) $2x - y + 3z - 5 = 0$
ب) $2x - y + 3z - 4 = 0$
ج) $x - y + z - 5 = 0$

أ. نعم. عند A يعطي الطرف الأيسر $2 - 0 + 3 = 5$ ، فالثابت -5 . والناظم بقي $(2, -1, 3)$ كما في $\mathcal{P}$ ، وهذا هو معنى التوازي.

بُعد نقطة عن مستوٍ

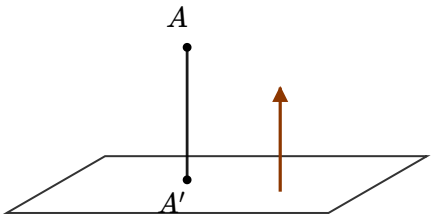
الفقرة الثانية من الدرس تعطي الصيغة مباشرةً، بلا تمهيد. وهي أكثر صيغةٍ تُستعمل في مسائل الفراغ، لأنّها تحوّل سؤالاً هندسيّاً إلى تعويضٍ في أربعة أعداد.

مبرهنة 6

في معلمٍ متجانس، ولتكن $ax+by+cz+d=0$ معادلةً للمستوي $\mathcal{P}$. بُعد النقطة $A(\alpha,\beta,\gamma)$ عن $\mathcal{P}$ يُعطى بهذه العلاقة. $\frac{|a\alpha+b\beta+c\gamma+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

الكتاب، الصفحة 49

تذكّر: اقرأ الصيغة مرّةً واحدةً بعينٍ ناقدة: البسط يخلط المستوي بالنقطة، والمقام لا يعرف النقطة أصلاً. المقام هو $\|n\|$ وحده، فلو غيّرت النقطة بقي كما هو. من يضع $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$ في المقام يكون قد قلب دور المستوي ودور النقطة.



النقطة A' هي المسقط القائم لـ A على $\mathcal{P}$ ، والبُعد المطلوب هو الطول AA' . الشعاع المرسوم على اليمين هو n .

برهان الصيغة كما في الكتاب صفحة 49. الفكرة: احسب $n\cdot\overrightarrow{AA'}$ بطريقتين، مرّةً بالأطوال ومرّةً بالمركّبات، ثمّ قارن.

$$n\cdot\overrightarrow{AA'}$$

1. ① بالأطوال، والسبب مهمّ كلا الشعاعين $\overrightarrow{AA'}$ و n عمودٌ على $\mathcal{P}$ ، ومن ذلك يلزم أنّهما مرتبطان خطّيّاً. وعند الارتباط الخطّي وحده تصير المتراجحة مساواةً.

$$\left|n\cdot\overrightarrow{AA'}\right| = \|n\|\times AA'$$

2. ② بالمركّبات مركّبات $\overrightarrow{AA'}$ هي $(\alpha'-\alpha,\beta'-\beta,\gamma'-\gamma)$. اضرب واجمع، ثمّ أضف d واطرحه حتّى يظهر تعبيران متشابهان.

$$n\cdot\overrightarrow{AA'} = (a\alpha'+b\beta'+c\gamma'+d)-(a\alpha+b\beta+c\gamma+d)$$

3. ③ القوس الأوّل صفر لأنّ A' نقطةٌ من $\mathcal{P}$ ، فإحداثيّاتها تحقّق معادلته. هنا وحدها يُستعمل انتماء A' إلى المستوي؛ في الخطوتين السابقتين كانت مجرّد طرفٍ للشعاع.

$$n\cdot\overrightarrow{AA'} = -(a\alpha+b\beta+c\gamma+d)$$

4. ④ قارن بالخطوة ① خذ القيمة المطلقة للطرفين واقسم على $\|n\|$. الإشارة السالبة تختفي تحت القيمة المطلقة، وهذا سبب وجود الشرطتين في البسط.

$$AA' = \frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

🚨 الخطوة ① ليست قاعدةً عامّة. للشعاعين الكيفيّين يكون $|u \cdot v|$ أصغر من أو يساوي $\|u\| \times \|v\|$ ، والمساواة عند الارتباط الخطّي فقط. الكتاب يقول «مرتبطان خطّياً» ولا يقول لماذا تتبعها المساواة. من يحفظ السطر بلا سببه يستعمله حيث لا يصحّ.

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \times \|v\|$$

احسب بُعد $A\,(5, -3, 4)$ عن $\mathcal{P} : 2x - y + 3z - 5 = 0$.

كيف أبدأ؟ البسط: عوّض الإحداثيّات في الطرف الأيسر وخذ القيمة المطلقة. المقام: $\sqrt{4 + 1 + 9}$.

أ) $\frac{20}{\sqrt{50}}$

ب) $\frac{14}{\sqrt{14}}$

ج) $\frac{20}{\sqrt{14}}$

ج. نعم: البسط $|10 + 3 + 12 - 5| = 20$ والمقام $\sqrt{2^2 + 1 + 3^2} = \sqrt{14}$. وبإخراج الجذر من المقام تصير $\frac{10\sqrt{14}}{7}$ ، أي نحو $5{,}35$.

انتبه: المبرهنة لا تشترط أن تكون A خارج المستوي. إن كانت عليه صار البسط صفراً وأعطت الصيغة البُعد صفراً، وهو الجواب الصحيح. لا تتوقّف عن الحساب ظنّاً أنّ الحالة ممنوعة. وفي المقابل، لا تنسَ شرطَي القيمة المطلقة: البسط قد يخرج سالباً، والبُعد لا يكون سالباً أبداً.

وضعا مستويين، والقاعدة التي ليست في هذا الدرس

🚨 المثال الأخير في الدرس يقرأ وضع مستويين من ناظميهما، ويستعمل ثلاث قواعد لا تجد لها أثراً في هذه الصفحات: لا مبرهنة ولا تعريف. مكانها هو الدرس السابق، صفحة 46، تحت سؤال «كيف نعيّن الأوضاع النسبية لمستويين اعتماداً على الأشعة النّاظمة؟». من قفز إلى هنا مباشرةً سيحلّ التمارين بالتخمين.

مقروءةً من الدرس السابق

$n_1 = k\,n_2$ ناظمان مرتبطان خطّيّاً: المستويان متوازيان أو منطبقان. وإن لم يكونا مرتبطين فالمستويان متقاطعان.

$n_1 \cdot n_2 = 0$ ناظمان متعامدان: المستويان متعامدان، والعكس صحيح. وهذا سؤالٌ غير سؤال التوازي، وإن كان جوابه بنعم يستلزم أنّهما متقاطعان.

الكتاب، الصفحة 46

تذكّر: سؤالان لا سؤال واحد. الأوّل: متوازيان أم متقاطعان؟ والثاني: متعامدان أم لا؟ والجواب بنعم على الثاني يستلزم التقاطع، أمّا العكس فلا: مستويان متقاطعان قد لا يكونان متعامدين، والكتاب يعطي المثال بنفسه، $n_1 \cdot n_2 = -7$.

الحالة الثانية من مثال الكتاب صفحة 50: $\mathcal{P} : x - 2y + 3z - 1 = 0$ و $\mathcal{Q} : 2x - 4y + 6z = 0$.

ما وضعهما؟

$$n_1\,(1, -2, 3) \quad , \quad n_2\,(2, -4, 6)$$

1. ① اختبر الارتباط الخطّي كلّ مركّبةٍ من الثاني ضعف نظيرتها في الأوّل. الكتاب لا يكتب هذه الخطوة، بل يمرّ بها صامتاً؛ اكتبها أنت.

$$n_2 = 2\,n_1$$

2. ② متوازيان، والسؤال الباقي واحد الارتباط الخطّي يعطي التوازي، لكنّه لا يفرّق بين متوازيين ومنطبقين. للفصل يلزم شاهدٌ واحد: نقطةٌ تقع على أحدهما ولا تقع على الآخر.

$$O\,(0, 0, 0)$$

3. ③ جرّب المبدأ في $\mathcal{Q}$ يعطي المبدأ $0 = 0$ ، فهو عليه. وفي $\mathcal{P}$ يعطي -1 ، فهو ليس عليه. إذن المستويان متوازيان وغير منطبقين، وهو جواب الكتاب حرفاً.

$$0 - 0 + 0 - 1 = -1 \neq 0$$

الشاهد لا يلزم أن يكون المبدأ، لكنّه أسهل نقطةٍ تُجرَّب: تعويضه يترك الثابت وحده. إن كان المبدأ على كلا المستويين أو على أيٍّ منهما بصورةٍ لا تحسم، خذ نقطةً أخرى من أحدهما.

$$\mathcal{P} \quad , \quad \mathcal{Q} \quad , \quad \mathcal{R}$$

$\mathcal{P} : 7x + 3y - z - 1 = 0$ و $\mathcal{R} : 2x - 3y + 5z + 4 = 0$. أهما متعامدان؟

كيف أبدأ؟ اقرأ الناظمين من المعاملات مباشرةً، ثمّ احسب جداءهما السّلّمي. لا حاجة إلى رسمٍ ولا إلى نقطة.

أ) نعم، لأنّ $14 - 9 - 5 = 0$

ب) لا، لأنّ الناظمين غير مرتبطين خطّيّاً

ج) لا يمكن الحكم قبل إيجاد مستقيم تقاطعهما

أ. نعم: $n_1\,(7, 3, -1)$ و $n_2\,(2, -3, 5)$ ، والجداء $14 - 9 - 5 = 0$. هذا هو السؤال ③ من تَدَرَّبْ صفحة 50، وفيه ثلاثة مستويات وثلاثة أزواج.

المصدر: الرياضيات، الجزء الثاني، الصفحات 48 إلى 50 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.