الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

الجداء السّلّمي في الفراغ

كلّ ما أثبتناه في المستوي ينتقل إلى الفراغ، والسبب سطرٌ واحد

الجداء السّلّمي في الفراغ . الوحدة 2 . الدرس 2

بسيطة

الدرس السابق كان في المستوي، وهذا في الفراغ، ومع ذلك لن نُعيد برهاناً واحداً. السبب جملةٌ صغيرة يضعها الكتاب بجانب مصباح: شعاعان يقعان بالضرورة في مستوٍ. فمهما بدا الشكل مجسّماً، فإنّ أيّ شعاعين فيه يعيشان معاً في مستوٍ واحد، وهناك نعرف كلّ شيء. هذا الدرس يضيف شيئاً واحداً جديداً حقّاً: مركّبةً ثالثة في الصيغة التحليليّة.

التعريف، ولماذا لا نُعيد شيئاً

يبدأ الكتاب بسطرٍ لا يُقرأ عادةً: «فيما يأتي نفترض أنّنا اخترنا في الفراغ واحدة للطّول». من دونه لا معنى لكلمة «نظيم»، والتعريف الآتي مبنيٌّ على النظائم وحدها.

تعريف 2

الجداء السّلّمي لشعاعين u و v في الفراغ، هو هذا العدد الحقيقيّ. لا زاوية هنا $u \cdot v = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right)$ ولا معلم، والشعاع المعدوم غير مستثنى.

الكتاب، الصفحة 42

تذكّر: لاحظ أنّها الصيغة ① نفسها من الدرس السابق، حرفاً بحرف. ما كان في المستوي تذكرةً صار هنا تعريفاً.

ثمّ يأتي السطر الذي يحمل الدرس كلّه، في إطارٍ صغير بجانب مصباح: شعاعان يقعان بالضرورة في مستوٍ. اكتب $u = \overrightarrow{AB}$ و $v = \overrightarrow{AC}$ ، فيوجد مستوٍ $\mathcal{P}$ يحوي A و B و C ، وواحدة الطول فيه هي واحدة الطول في الفراغ. فالجداء السّلّمي لشعاعين في الفراغ هو جداؤهما في ذلك المستوي.

تذكّر: من هنا: كلّ عبارةٍ أُثبتت في المستوي تبقى صحيحةً في الفراغ. لا برهان جديد، والسبب أنّ المسألة لم تخرج من المستوي أصلاً.

انتبه: خطآن يقعان في التعريف نفسه. الأوّل: قلب الإشارات، أي كتابة $\frac{1}{2}\left(\|u\|^2+\|v\|^2-\|u+v\|^2\right)$ ؛ الترتيب في الكتاب هو نظيم المجموع أوّلاً، ثمّ يُطرح منه النظيمان. والثاني: نسيان العامل $\frac{1}{2}$. اختبارٌ سريع لكليهما: ضع $v=u$ ، فيجب أن يخرج $\|u\|^2$ ، لا ضِعفه ولا سالبه.

طبّق التعريف على الحالة $v=u$. ماذا يخرج؟

كيف أبدأ؟ عوّض v بـ u في الصيغة، وتذكّر أنّ $\|u+u\|=2\|u\|$. ثمّ ربّع وبسّط.

أ) $2\|u\|^2$

ب) $\|u\|^2$

ج) 0

ب. نعم: $\frac{1}{2}\left(4\|u\|^2-\|u\|^2-\|u\|^2\right)=\|u\|^2$. وهذا هو الاختبار الذي يكشف الخطأ في الإشارات أو في العامل.

الصيغتان المنقولتان من المستوي

ينقل الكتاب صيغتين من المستوي، ويضعهما في نقطتين بلا عنوان. الأولى بالزاوية، والثانية بالمسقط، وهما اللتان تُحلّ بهما مسائل المجسّمات حين لا يكون هناك معلم.

الصيغتان في الفراغ

$u\cdot v=\|u\|\cdot\|v\|\cos\alpha$ حيث α قياسٌ للزاوية الهندسيّة بين الشعاعين. وعلى وجه الخصوص $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2$.

$u\cdot v=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$ حيث H هي المسقط القائم للنقطة C على المستقيم (AB) ، ويُؤخذ المسقط داخل المستوي $\mathcal{P}$ الذي يحوي A و B و C .

الكتاب، الصفحة 42

انتبه: في صيغة المسقط، المُسقَطة هي C على المستقيم (AB) ، لا العكس. ومن أسقط B على (AC) حسب مقداراً آخر. القاعدة: الشعاع الذي تعرفه يبقى، والشعاع المجهول هو الذي يُستبدل بمسقطه.

في مكعّب $ABCDEFGH$ طول حرفه a، ما $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ ؟

> **كيف أبدأ؟** لا تحسب زاوية. اسأل: أين يقع مسقط F على المستقيم (AE) ؟ الوجه $ABFE$ مربّع، فالحرف EF عموديٌّ على AE .

أ) a^2

ب) $a^2\sqrt{2}$

ج) 0

أ. نعم: مسقط F على (AE) هو E نفسها، فيصير الجداء $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AE}=AE^2=a^2$.

الصيغة التحليليّة، والجديد الوحيد

هنا وحده يظهر شيءٌ جديد فعلاً: مركّبةٌ ثالثة. والكتاب يُبرز شرط المعلم المتجانس بلونٍ مختلف، فهو الشرط الذي تسقط الصيغة من دونه.

مبرهنة 3

إذا كانت مركّبات u و v في معلمٍ متجانس هي (x,y,z) و (x',y',z') بالترتيب. $u\cdot v=xx'+yy'+zz'$

الكتاب، الصفحة 42

برهان مبرهنة 3، كما في الكتاب صفحة 43. كلّ ما فيه تعويضٌ في التعريف ونشرٌ لمربّع مجموع، ولا يحتاج أداةً جديدة.

$$u\cdot v=xx'+yy'+zz'$$

1. ① النظيمان بالمركّبات في معلمٍ متجانس يُحسب النظيم بفيثاغورس في الفراغ، وهذا ما تعلّمناه في درس المسافة.

$$\|u\|^2=x^2+y^2+z^2$$

$$\|v\|^2=x'^2+y'^2+z'^2$$

2. ② نظيم المجموع مركّبات $u+v$ هي مجاميع المركّبات، فننشر المربّعات الثلاثة.

$$\|u+v\|^2=x^2+y^2+z^2+x'^2+y'^2+z'^2+2xx'+2yy'+2zz'$$

3. ③ عوّض في التعريف اطرح النظيمين من نظيم المجموع، فيبقى الحدّ المضاعف وحده، ثمّ اقسم على اثنين. وهذا هو المطلوب.

$$u\cdot v=\frac{1}{2}\left(2xx'+2yy'+2zz'\right)=xx'+yy'+zz'$$

الصيغة التحليليّة ليست تعريفاً جديداً، بل نتيجةٌ للتعريف بالنظائم. ولذلك تحتاج معلماً متجانساً: الخطوتان ① و② تحسبان النظائم بفيثاغورس، وهذا لا يصحّ إلّا فيه.

$$u \cdot v = xx' + yy' + zz'$$

انتبه: ثلاثة أخطاء تتكرّر في هذه الصيغة. الأوّل: نقل صيغة المستوي بمركّبتين $xx' + yy'$ ، فيسقط كلّ أثر المحور الثالث. والثاني: استعمالها في معلمٍ غير متجانس، وهو الشرط الذي يبرزه الكتاب بلونٍ مختلف. والثالث: التعويض بإحداثيّات النقطتين بدل مركّبات الشعاع؛ مركّبات $\overrightarrow{AB}$ هي إحداثيّات B ناقص إحداثيّات A .

في معلمٍ متجانس، $A(1,0,0)$ و $B(0,1,0)$ و $C(0,0,1)$. ما $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ؟

كيف أبدأ؟ احسب المركّبات أوّلاً: نهاية ناقص بداية لكلّ شعاع. ثمّ اضرب بالترتيب واجمع الثلاثة.

أ) 0

ب) 2

ج) 1

ج. نعم: مركّبات $\overrightarrow{AB}$ هي $(-1,1,0)$ ومركّبات $\overrightarrow{AC}$ هي $(-1,0,1)$ ، فالجداء $1 + 0 + 0 = 1$.

أربع قواعد، وبرهانها متروكٌ لك

يقول الكتاب قبل المبرهنة: «تفيد المبرهنة السّابقة في إثبات صحّة قواعد الحساب الّتي تُماثل نظيراتها في المستوي دون عناء»، ثمّ يكتب المبرهنة ويترك برهانها تمريناً للقارئ. والطريق الذي أعلنه هو الطريق: عوّض بالمركّبات، فتصير كلّ قاعدةٍ سطراً من الجبر العاديّ.

مبرهنة 4

$u \cdot v = v \cdot u$ التبديل.

$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$ التوزيع على الجمع.

$(au) \cdot (bv) = ab\,(u \cdot v)$ العددان يخرجان معاً، لا واحدٌ منهما.

$(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$ التوزيع من الجهة الأخرى.

الكتاب، الصفحة 43

تذكّر: القاعدة الثالثة هي الّتي تُخطَأ أكثر من غيرها: $(2u) \cdot (3v)$ تساوي $6\,(u \cdot v)$ ، لا $2\,(u \cdot v)$ ولا $3\,(u \cdot v)$.

انتبه: وما لا تقوله المبرهنة: لا يجوز الاختصار. من $u \cdot v = u \cdot w$ لا يتبع $v = w$ ، بل $u \cdot (v - w) = 0$ وحدها. الكتاب يحذّر من ذلك في الدرس السابق، وينطبق التحذير هنا كما هو.

نظيم u يساوي 5 ، ونظيم v يساوي 3 ، و $u \cdot v = -4$. ما $(2u) \cdot (v - 3u)$ ؟

كيف أبدأ؟ وزّع أوّلاً، ثمّ أخرج الأعداد. وتذكّر أنّ $u \cdot u = \|u\|^2$ ، أي مربّع النظيم لا النظيم.

أ) -38

ب) -158

ج) -83

ب. نعم: $2(u \cdot v) - 6(u \cdot u) = 2(-4) - 6(25) = -8 - 150 = -158$.

مثال الكتاب بلا معلم: رباعي وجوهٍ ومكعّب

المثال الأوّل في الكتاب رباعي وجوهٍ منتظم، وكلّ وجهٍ فيه مثلّثٌ متساوي الأضلاع طول ضلعه a . لا معلم هنا ولا إحداثيّات، بل زوايا معروفة وتفكيك.

$ABCD$ رباعي وجوهٍ منتظم طول حرفه a . احسب $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ثمّ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$. كما في الكتاب صفحة 43.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \quad , \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$$

1. ① الزاوية معروفة الوجه ABC مثلّثٌ متساوي الأضلاع، فالزاوية بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ قياسها $\frac{\pi}{3}$ ، وجيب تمامها $\frac{1}{2}$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a \times a \times \cos\frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2}$$

2. ② وبالمثل مع الحرف الثالث الوجه ABD متساوي الأضلاع أيضاً، فالحساب نفسه يعطي النتيجة نفسها بلا إعادة.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2}$$

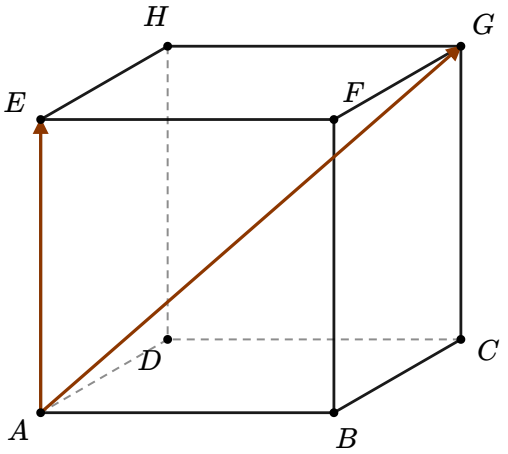
3. ③ فكّك الشعاع الذي لا يخرج من A الشعاع $\overrightarrow{CD}$ لا يبدأ من A ، فنكتبه بفرقٍ بين شعاعين يبدآن منها، ثمّ نوزّع بالقاعدة ❷.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$$

الكتاب يترك هذا الصفر بلا تعليق. ومعناه أنّ (AB) و (CD) متعامدان، مع أنّهما لا يتقاطعان أصلاً: في رباعي الوجوه هما حرفان متخالفان. التعامد في الفراغ لا يستلزم التقاطع، وتعريفه يأتي في الدرس التالي صفحة 45.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

والجزء الثاني من المثال نفسه مكعّب. الفكرة فيه واحدة: استبدل الشعاع المجهول بمسقطه، ثمّ اقرأ الجداء من حرفٍ واحد.



المكعّب $ABCDEFGH$ بحرفٍ طوله a . الشعاعان المرسومان هما $\overrightarrow{AE}$ الحرف، و $\overrightarrow{AG}$ قطر المكعّب.

في المكعّب $ABCDEFGH$ بحرفٍ طوله a ، احسب $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG}$. كما في الكتاب صفحة 44، وهو أصعب سطرٍ في الدرس.

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG}$$

1. ① الإسقاط الأوّل، على مستوٍ النقطة H هي المسقط القائم للنقطة G على المستوي (ADH) ، لأنّ الحرف HG عموديٌّ على ذلك المستوي. فيُستبدل $\overrightarrow{AG}$ بـ $\overrightarrow{AH}$.

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AH}$$

2. ② الإسقاط الثاني، على مستقيم والنقطة E هي المسقط القائم للنقطة H على المستقيم (AE) ، لأنّ EH عموديٌّ على AE في المربّع $ADHE$.

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AE}$$

3. ③ اقرأ النتيجة بقي جداء شعاعٍ مع نفسه، وهو مربّع الطول. والطول هنا حرف المكعّب.

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG} = AE^2 = a^2$$

🧯 هذه خطوتان لا خطوة: إسقاطٌ على مستوٍ ثمّ إسقاطٌ على مستقيم. والكتاب لم يعرّف في لُبّ الدرس إلّا الإسقاط على مستقيم داخل مستوٍ، فظهرت الخطوة الأولى في الحلّ وحده. ولو أسقطتَ G مباشرةً على (AE) لوقع المسقط على E أيضاً وخرجت النتيجة نفسها؛ فالطريق القصير ليس خطأً حسابيّاً، لكنّ خطوات الكتاب هي المكتوبة في الحلّ.

$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AE}=a^2$$

انتبه: وفي آخر بندٍ من هذا المثال يظهر $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{HC}=0$ ، بعد استبدال $\overrightarrow{HC}$ بـ $\overrightarrow{EB}$. لا تقرأ الصفر من الرسم: $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CH}$ يساوي a^2 لا صفراً، مع أنّ $[CH]$ قطر وجهٍ لا حرفاً، ومع أنّه يبدو في الصورة متخالفاً مع $[AE]$. الحساب يحسم، لا الشكل.

المصدر: الرياضيات، الجزء الثاني، الصفحات 42 إلى 44 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.